

Introducción

Las integrales impropias son integrales que no cumplen con las condiciones estándar de integración, ya sea porque el intervalo de integración es infinito o porque el integrando tiene una discontinuidad en el intervalo. Estas integrales se evalúan utilizando límites y pueden converger (tener un valor finito) o divergir (no tener un valor finito).

Objetivos: Al finalizar esta clase, los estudiantes serán capaces de:

- Identificar y resolver integrales impropias de Tipo 1 (intervalos infinitos).
- Identificar y resolver integrales impropias de Tipo 2 (integrandos discontinuos).
- Aplicar el Teorema de Comparación para determinar la convergencia o divergencia de integrales impropias.

1 Tipo 1: Intervalos infinitos

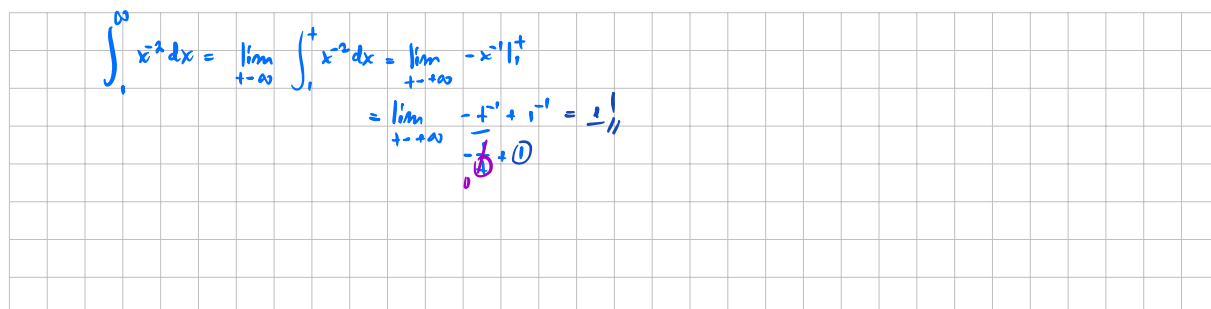
Las integrales impropias de Tipo 1 tienen intervalos de integración infinitos, como $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ o $(-\infty, \infty)$. Estas integrales se definen como límites:

$$\begin{aligned}\int_a^\infty f(x) dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx \\ \int_{-\infty}^b f(x) dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx \\ \int_{-\infty}^\infty f(x) dx &= \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx\end{aligned}$$

1.0.1 Ejemplo 1

Resuelva la siguiente integral impropia:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$$



$$\begin{aligned}\int_1^\infty x^{-2} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^{-2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-x^{-1} \right]_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{1} \right) = 1\end{aligned}$$

2 Tipo 2: Integrandos discontinuos

Las integrales impropias de Tipo 2 tienen integrandos que son discontinuos en algún punto del intervalo de integración. Estas integrales se definen como límites:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t f(x) dx + \lim_{t \rightarrow c^+} \int_t^b f(x) dx$$

donde c es el punto de discontinuidad.

2.0.1 Ejemplo 2

Resuelva la siguiente integral impropia:

$$\int_0^1 x \ln x dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{-1/2} dx &= \lim_{b \rightarrow 0^+} \int_b^1 x^{-1/2} dx = \lim_{b \rightarrow 0^+} 2x^{1/2} \Big|_b^1 \\ &= \lim_{b \rightarrow 0^+} 2 - 2b^{1/2} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \ln x dx &= \lim_{b \rightarrow 0^+} \int_b^1 x \ln x dx = \lim_{b \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right) \Big|_b^1 \\ &= \lim_{b \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2} \ln(1) - \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{b^2}{2} \ln b - \frac{b^2}{4} \right) = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Handwritten notes for the second integral:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \ln x dx &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\ u &= \ln x, \quad v = x^2 \\ dv &= 2x dx, \quad du = \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C \end{aligned}$$

3 Teorema de comparación

El Teorema de Comparación se utiliza para determinar la convergencia o divergencia de integrales impropias comparándolas con otras integrales conocidas.

Si $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq a$ y $\int_a^\infty g(x) dx$ converge, entonces $\int_a^\infty f(x) dx$ también converge. Si $\int_a^\infty f(x) dx$ diverge, entonces $\int_a^\infty g(x) dx$ también diverge.

3.0.1 Ejemplo 3

Determine si la siguiente integral converge:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3 + 1} dx$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3 + 1} dx$$

Handwritten notes:

converge $\checkmark$ $\frac{1}{x^3+1} \leq \left(\frac{1}{x^3}\right)$ criterio P $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ converge si $p > 1$
 $p \geq 1 \rightarrow$ diverge

$$\int_1^\infty x^{-3} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^{-3} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} x^{-2} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} (t^{-2} - 1) \right) = \frac{1}{2}$$