

Cálculo en una variable

Introducción

El problema de calcular el **área bajo una curva** surge naturalmente en diversos contextos de la matemática aplicada y la física. Desde tiempos antiguos, matemáticos han intentado encontrar maneras de medir superficies limitadas por curvas, lo que llevó al desarrollo del concepto de integral.

Para aproximar el **área bajo una curva**, podemos dividir la región en pequeñas secciones cuya **área es fácil de calcular**, como rectángulos o trapecios. A medida que refinamos esta división, obtenemos una mejor aproximación del **área exacta**. Esta idea es la base de la **suma de Riemann**, que formaliza el proceso de tomar el límite de estas aproximaciones para obtener la integral definida.

En esta guía, exploraremos cómo se construye la integral a partir de la suma de Riemann, presentaremos ejemplos de aplicación y utilizaremos propiedades de la sumatoria y el límite para calcular algunos casos.

Objetivos: Al finalizar esta clase, los estudiantes serán capaces de:

- Comprender la necesidad de medir el **área bajo una curva** y las primeras aproximaciones utilizadas.
- Introducir la **suma de Riemann** como método fundamental para definir la integral.
- Aplicar las propiedades de la **sumatoria** y el **límite** para evaluar algunas integrales.
- Explorar aplicaciones de la integral en el cálculo de **áreas** y **distancias**.

Explicar el problema de áreas y construcción de la integral.



1 Definición de integral

Dada una función $f(x)$ continua en un intervalo $[a, b]$, la integral definida de $f(x)$ en ese intervalo se denota como:

$$\int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

Esta expresión representa el **límite de una suma de Riemann**, que se define a continuación.

2 Suma de Riemann: Construcción de la integral

Para aproximar el **área bajo la curva** $y = f(x)$, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud:

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} \quad (2)$$

Seleccionamos un punto en cada subintervalo, denotado como x_i^* , y formamos rectángulos con base Δx y altura $f(x_i^*)$. La suma de las **áreas de estos rectángulos** se conoce como **suma de Riemann**:

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x \quad (3)$$

A medida que $n \rightarrow \infty$, los rectángulos se vuelven más estrechos y la suma se aproxima al **área exacta** bajo la curva, es decir, la integral:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x \quad (4)$$

2.1 Ejemplo de Suma de Riemann

Calculemos el **área bajo la curva** de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$ usando la definición de suma de Riemann.

