

Cálculo en una variable

Introducción

El concepto de límite es fundamental en cálculo y análisis matemático. Nos permite describir el comportamiento de una función cuando la variable independiente se aproxima a un cierto valor. En esta guía, exploraremos de manera intuitiva la idea de límite y su importancia en el cálculo.

Objetivos: Al finalizar esta clase, los estudiantes serán capaces de:

- Comprender el concepto intuitivo de límite.
- Identificar la importancia del límite en el análisis de funciones.
- Resolver problemas básicos de límites por métodos gráficos y numéricos.

1 Concepto intuitivo de límite

El límite de una función describe el valor al que se aproxima la función cuando la variable independiente se acerca a un punto dado. De manera informal, escribimos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad (1)$$

Esto significa que cuando x se acerca a a , $f(x)$ se aproxima al valor L .

1.1 Aproximación numérica

Consideremos la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Evaluamos la función en valores cercanos a $x = 1$:

x	$f(x)$
0.9	1.9
0.99	1.99
0.999	1.999
1.001	2.001
1.01	2.01
1.1	2.1

A partir de la tabla, observamos que cuando x se acerca a 1, $f(x)$ se acerca a 2. Así, intuitivamente:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 \quad (2)$$

1.2 Interpretación gráfica

Consideremos la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Si graficamos esta función, observamos que a medida que x se acerca a 1, la función se aproxima a $y = 2$.

Graficar y mostrar el límite $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ por ambos laterales y comprobar que el límite existe pero $f(1)$ no está definido ya que $x \notin \text{Dom}(f)$.



2 Límites laterales y existencia del límite

El límite de una función en un punto existe si y solo si los límites laterales en ese punto son iguales. Definimos los límites laterales como:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2 \quad (3)$$

Si $L_1 = L_2$, entonces el límite existe y es igual a ese valor común.

2.1 Límites Laterales

Consideremos la función por partes:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 2 \\ x^2 - 2, & x > 2 \end{cases} \quad (4)$$

Compruebe si $\lim_{x \rightarrow 2}$ existe o no.



Calcule el valor de $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$



3 Límites notables

Existen ciertos límites fundamentales que aparecen con frecuencia en cálculo. Algunos de ellos son:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x)^{1/x} = e \quad (8)$$

Estos límites son fundamentales en el análisis matemático y se utilizan en el desarrollo de muchas teorías y aplicaciones.

4 Límites infinitos

Un límite infinito ocurre cuando la función crece o decrece sin acotación a medida que la variable independiente se aproxima a un cierto valor. En este caso, escribimos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \quad (9)$$

Esto significa que la función no tiene un valor finito en ese punto, pero su comportamiento puede ser descrito. Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty \quad (10)$$

Lo que indica que la función tiende a infinito conforme x se acerca a 0.