

Cálculo Vectorial

Introducción

En esta guía se estudian los principales conceptos del cálculo aplicados a curvas definidas mediante ecuaciones paramétricas. Muchas trayectorias en el plano o en el espacio no pueden expresarse mediante una sola ecuación de la forma $y = f(x)$, por lo que las representaciones paramétricas ofrecen una manera más general y flexible de describir movimientos y formas geométricas.

A partir de una variable auxiliar t , llamada **parámetro**, es posible expresar las coordenadas x y y de los puntos de una curva como funciones $x = f(t)$ y $y = g(t)$. Esto permite analizar el comportamiento de la curva desde una perspectiva dinámica, considerando t como una medida del tiempo o del recorrido de una partícula a lo largo de la trayectoria.

En las siguientes secciones se presentan los métodos de cálculo asociados a estas curvas, incluyendo la obtención de tangentes, longitudes de arco, áreas bajo la curva y áreas de superficies de revolución. Cada tema se desarrolla mediante ejemplos detallados, seguidos de espacios de trabajo para resolver y discutir durante las clases.

Objetivos:

- Comprender el significado y la construcción de curvas definidas por ecuaciones paramétricas.
- Aplicar el cálculo diferencial para determinar tangentes y concavidad en curvas paramétricas.
- Calcular longitudes de arco y áreas utilizando integrales en forma paramétrica.
- Analizar y obtener el área de superficies generadas por la rotación de curvas paramétricas.
- Desarrollar intuición geométrica y habilidades gráficas para interpretar trayectorias en el plano.

1 Curvas definidas por ecuaciones paramétricas

En muchos casos, las curvas en el plano no pueden expresarse mediante una ecuación explícita del tipo $y = f(x)$, como ocurre con aquellas que no pasan la prueba de la recta vertical. Sin embargo, es posible describir el movimiento de una partícula a lo largo de una curva C mediante dos funciones que dependen de una tercera variable t , llamada **parámetro**.

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

Cada valor de t determina un punto (x, y) del plano. Al variar t , el punto traza la curva C , llamada **curva paramétrica**. El parámetro t puede representar el tiempo u otra magnitud que indique la posición de la partícula en la trayectoria.

Observación: Cuando t aumenta, la partícula se mueve sobre la curva en la dirección de crecimiento de t .

Ejemplo 1

Trace e identifique la curva definida por las ecuaciones paramétricas:

$$x = t^2 - 2t, \quad y = t + 1$$

$x = (y-1)^2 - 2(y-1)$
 $= y^2 - 2y + 1 - 2y + 2 = y^2 - 4y + 3$

$\hookrightarrow t = y - 1$

Solución: Cada valor de t produce un punto sobre la curva. Por ejemplo:

t	-2	-1	0	1	2	3	4
x	8	3	0	-1	0	3	8
y	-1	0	1	2	3	4	5

Al graficar los puntos obtenidos, se genera una trayectoria.

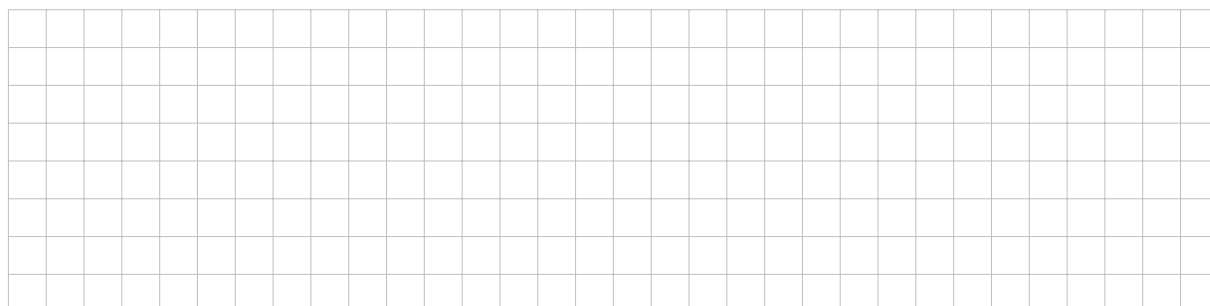
Observa que la partícula parte en $(0, 1)$ cuando $t = 0$ y termina en $(8, 5)$ cuando $t = 4$, desplazándose en la dirección de las flechas conforme t aumenta.

Eliminando el parámetro de la ecuación:

$$t = y - 1 \Rightarrow x = (y - 1)^2 - 2(y - 1) = y^2 - 4y + 3$$

Por lo tanto, la curva corresponde a la parábola:

$$x = y^2 - 4y + 3$$



Ejemplo 2

¿Qué curva representan las ecuaciones paramétricas?

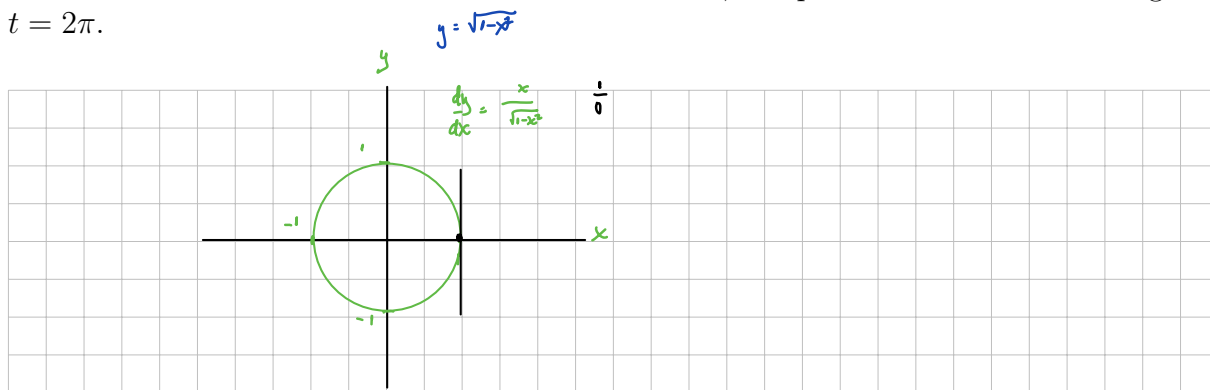
$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Solución: Al eliminar el parámetro t :

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

La curva es una circunferencia de radio 1 centrada en el origen.

Cuando $t = 0$, el punto es $(1,0)$. A medida que t aumenta, el punto (x,y) se mueve en sentido antihorario alrededor de la circunferencia, completando una vuelta al llegar a $t = 2\pi$.



Resumen

- Una **curva paramétrica** se define mediante funciones $x = f(t)$, $y = g(t)$.
- Cada valor de t determina un punto (x,y) .
- La dirección del movimiento está dada por el incremento de t .
- Es posible eliminar el parámetro para obtener una ecuación cartesiana equivalente.

2 Cálculo con curvas paramétricas

Una vez comprendido cómo representar curvas mediante ecuaciones paramétricas, podemos aplicar los métodos del cálculo diferencial a dichas curvas. En particular, podremos hallar pendientes de tangentes, concavidades, longitudes de arco y áreas de superficie.

2.1 Tangentes

Supongamos que $x = f(t)$ y $y = g(t)$ son funciones derivables. Queremos encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva paramétrica en un punto dado.

Sabemos por la **regla de la cadena** que:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

y si $\frac{dx}{dt} \neq 0$, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

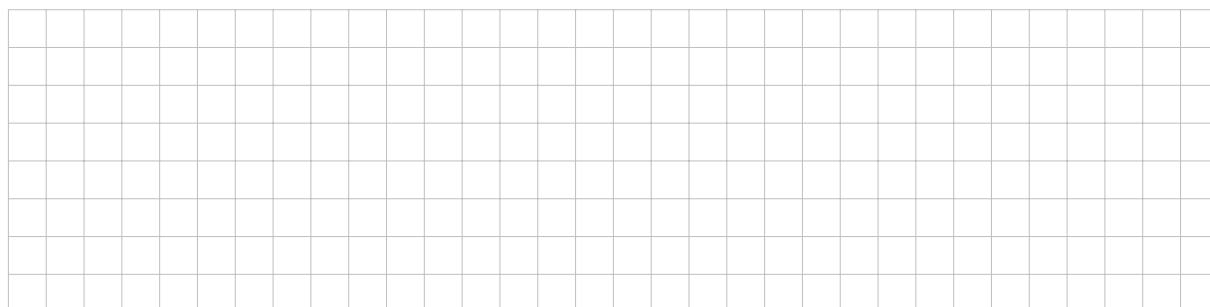
Interpretación geométrica: Si se piensa la curva como trazada por una partícula en movimiento, entonces $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ representan las velocidades horizontal y vertical de la partícula. Por lo tanto, $\frac{dy}{dx}$ es el cociente entre estas velocidades: la pendiente de la recta tangente.

Rectas horizontales y verticales:

- La tangente es **horizontal** cuando $\frac{dy}{dt} = 0$ y $\frac{dx}{dt} \neq 0$.
- La tangente es **vertical** cuando $\frac{dx}{dt} = 0$ y $\frac{dy}{dt} \neq 0$.

También puede calcularse la segunda derivada (curvatura o concavidad) mediante:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \bigg/ \frac{dx}{dt}$$



Ejemplo 1

Una curva C está definida por las ecuaciones paramétricas:

$$x = t^2, \quad y = t^3 - 3t$$

(a) Demuestre que C tiene dos rectas tangentes en el punto $(3, 0)$ y encuentre sus ecuaciones. (b) Determine el punto donde la curva tiene tangente horizontal o vertical. (c) Determine dónde la curva es cóncava hacia arriba o hacia abajo. (d) Trace la curva.

Solución:

(a) Notamos que:

$$y = t^3 - 3t = t(t^2 - 3)$$

Esto vale cero cuando $t = 0$ o $t = \pm\sqrt{3}$. Los tres valores dan el mismo punto $x = t^2 = 3$, $y = 0$. Así, la curva pasa dos veces por el punto $(3, 0)$.

Calculamos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2 - 3}{2t} = \frac{3}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)$$

Evaluable en $t = \pm\sqrt{3}$:

$$m = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-3) \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3) \end{cases}$$

Por lo tanto, hay dos tangentes que se cruzan en $(3, 0)$.

(b) La tangente es horizontal si $\frac{dy}{dt} = 0$:

$$3t^2 - 3 = 0 \Rightarrow t = \pm 1$$

Entonces los puntos son $(1, -2)$ y $(1, 2)$.

Es vertical cuando $\frac{dx}{dt} = 0$:

$$2t = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

(c) Para la concavidad:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) / \frac{dx}{dt} = \frac{3}{2t} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right)$$

La curva es cóncava hacia arriba cuando $t > 0$ y hacia abajo cuando $t < 0$.

(d) Finalmente, se puede graficar la curva observando los puntos característicos:

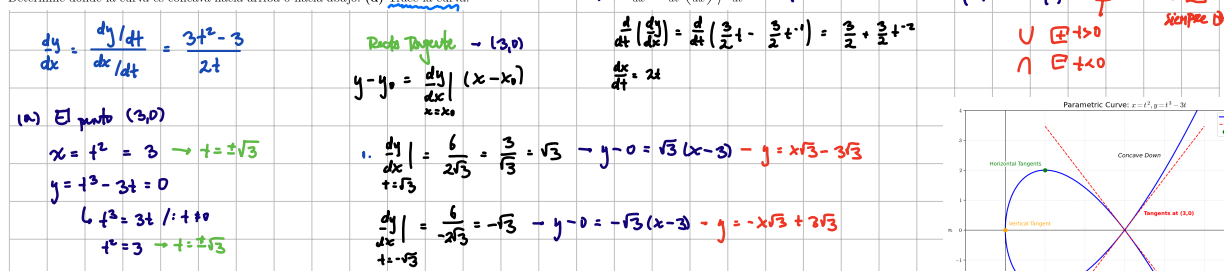
$$(-2, 2), (0, 0), (1, -2), (3, 0), (1, 2)$$

Ejemplo 1

Una curva C está definida por las ecuaciones paramétricas:

$$x = t^2, \quad y = t^3 - 3t$$

(a) Demuestre que C tiene dos rectas tangentes en el punto $(3, 0)$ y encuentre sus ecuaciones. (b) Determine el punto donde la curva tiene tangente horizontal o vertical. (c) Determine dónde la curva es cóncava hacia arriba o hacia abajo. (d) Trace la curva.



2.2 Áreas

Sabemos que el área bajo una curva cartesiana $y = F(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ se calcula mediante:

$$A = \int_a^b F(x) dx$$

Cuando la curva está definida de forma paramétrica por:

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

podemos obtener el área aplicando la regla de sustitución para integrales definidas:

$$A = \int_a^b y dx = \int_{\alpha}^{\beta} \underbrace{g(t)}_y \underbrace{f'(t) dt}_{dx}$$

$\frac{dx}{dt} = f'(t) \Rightarrow dx = f'(t) dt$

Observación: Los límites de integración se determinan según los valores del parámetro t que generan los puntos extremos del intervalo en x . Si la orientación del recorrido cambia, también cambia el signo del área.

Ejemplo 2

Si se usa la representación de la circunferencia unitaria dada en el ejemplo 10.1.2:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

entonces:

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t$$

De modo que el teorema da:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

Como se esperaba.

Por otro lado, si se usa la representación dada en el ejemplo 10.1.3:

$$x = \sin 2t, \quad y = \cos 2t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

entonces:

$$\frac{dx}{dt} = 2 \cos 2t, \quad \frac{dy}{dt} = -2 \sin 2t$$

y la integral del teorema da:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cos^2 2t + 4 \sin^2 2t} dt = \int_0^{2\pi} 2 dt = 4\pi$$

Conclusión: La segunda parametrización recorre la circunferencia dos veces, por lo que su longitud total es el doble de la original.

Ejemplo 2

Si se usa la representación de la circunferencia unitaria dada en el ejemplo 10.1.2:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad P = 2\pi$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

2.3 Área de una superficie

De manera análoga a la longitud de arco, se puede obtener una fórmula para el área de una superficie generada al rotar una curva paramétrica alrededor de un eje.

Supongamos que la curva está dada por:

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

donde $f'(t)$ y $g'(t)$ son continuas y $g(t) \geq 0$. Si la curva se rota en torno al eje x , el área de la superficie generada está dada por:

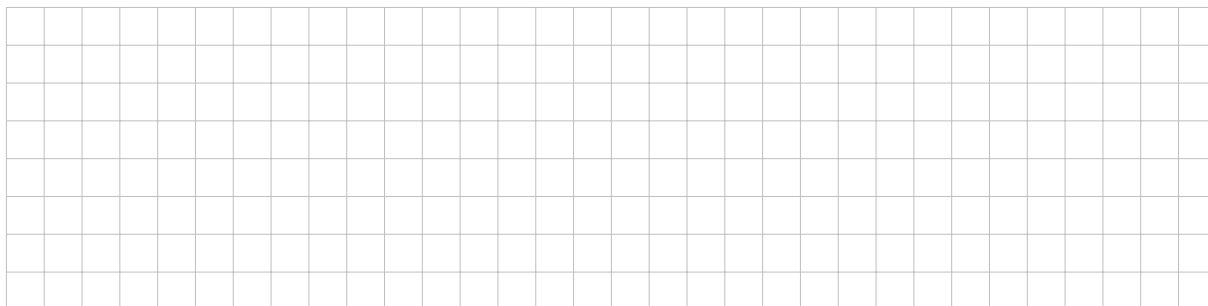
$$S = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

De manera similar, si la rotación se realiza en torno al eje y , la fórmula se convierte en:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Interpretación: Cada elemento infinitesimal de la curva genera una banda circular al rotar, cuyo radio es y (o x , según el eje de rotación) y cuya longitud corresponde a ds . Así, el área total se obtiene sumando todas las bandas:

$$dS = 2\pi y ds, \quad ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$



Ejemplo 3

Demuestre que el área de la superficie de una esfera de radio r es $4\pi r^2$.

Solución:

La esfera se obtiene al rotar el semicírculo:

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

alrededor del eje x .

Aplicando la fórmula del área:

$$S = \int_0^{\pi} 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Calculamos las derivadas:

$$\frac{dx}{dt} = -r \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = r \cos t$$

Sustituyendo:

$$S = \int_0^\pi 2\pi r \sin t \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt$$

$$S = 2\pi r^2 \int_0^\pi \sin t \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt$$

$$S = 2\pi r^2 \int_0^\pi \sin t dt = 2\pi r^2 [-\cos t]_0^\pi = 4\pi r^2$$

$$\boxed{S = 4\pi r^2}$$

Conclusión: El área de la superficie de una esfera de radio r es $4\pi r^2$, que coincide con la fórmula clásica obtenida por rotación de un semicírculo.

Ejemplo 3

Demuestre que el área de la superficie de una esfera de radio r es $4\pi r^2$.

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -r \sin \theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = r \cos \theta$$

semicírculo

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$S = \int_0^\pi 2\pi r \sin \theta \underbrace{\sqrt{r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta}}_{r^2} d\theta = \int_0^\pi 2\pi r^2 \sin \theta d\theta = 2\pi r^2 \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta}_{-\cos \theta \Big|_0^\pi = -(-1) - (-1) = 2} = 4\pi r^2$$