

Intro. al Cálculo

Introducción

Los **axiomas de orden** constituyen la base formal que nos permite comparar números reales y establecer cuándo uno es mayor o menor que otro. El sistema de números reales disfruta de una estructura de orden que va más allá de la simple intuición: la sensación de que algunos números son “más grandes” que otros o que están más a la “derecha” en la recta real puede axiomatizarse y reducirse a un pequeño conjunto de reglas fundamentales. En este capítulo estudiaremos dichos axiomas, sus consecuencias más importantes y aprenderemos a usarlos para demostrar desigualdades con rigor matemático.

Objetivos:

- Comprender el enunciado y la interpretación de los cuatro axiomas de orden de los números reales.
- Conocer el conjunto $\mathbb{R}^+$ y su propiedad de cerradura bajo suma y multiplicación.
- Aplicar los axiomas de orden para demostrar desigualdades y teoremas elementales.
- Practicar técnicas de demostración: por casos, por contradicción y construcción directa.

1 Los Axiomas de Orden

El sistema de números reales $\mathbb{R}$ es un **cuerpo ordenado**. Parte de nuestra imagen habitual de los reales es la sensación de que algunos números son “más grandes” que otros, o que están más a la “derecha” que otros en la recta real. Expresamos esto usando **desigualdades** $a < b$ o $a \leq b$. Esta estructura puede axiomatizarse y reducirse a un pequeño conjunto de reglas.

El sistema de números reales satisface los siguientes cuatro **axiomas de orden**. Aquí $a < b$ es una declaración que es verdadera o falsa.

1.1 Los Cuatro Axiomas

O1 — Tricotomía: Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple una y solo una de las siguientes tres condiciones:

$$a = b, \quad a < b, \quad b < a.$$

O2 — Transitividad: Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

O3 — Suma: Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

O4 — Producto: Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$.

Estos cuatro axiomas son los pilares sobre los que se construye toda la teoría de desigualdades en los números reales. A partir de ellos se pueden deducir todas las propiedades de orden que utilizamos cotidianamente.



1.2 El Conjunto $\mathbb{R}^+$ y su Cerradura

Al conjunto de los números reales que son mayores que 0 lo denotaremos por $\mathbb{R}^+$ y será llamado el **conjunto de los números reales positivos**. En símbolos:

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}.$$

Una propiedad fundamental de este conjunto es que es **cerrado bajo la suma y el producto**, lo que significa que al operar dos elementos positivos el resultado sigue siendo positivo. Esto se enuncia formalmente como sigue.

Teorema ($\mathbb{R}^+$ es cerrado): Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$. Entonces:

1. $a + b \in \mathbb{R}^+$.
2. $a \cdot b \in \mathbb{R}^+$.

Demostración:

Inciso 1. Si $a, b \in \mathbb{R}^+$ entonces $a > 0$ y $b > 0$. Usando el axioma O3 tenemos:

$$a > 0 \implies a + b > 0 + b \implies a + b > b.$$

Como $a + b > b$ y $b > 0$, usando el axioma de transitividad (O2) concluimos que $a + b > 0$, es decir, $a + b \in \mathbb{R}^+$.

Inciso 2. Si $a \in \mathbb{R}^+$ entonces $a > 0$ y por el axioma O4, como $b > 0$, entonces:

$$a \cdot b \geq 0 \cdot b \iff a \cdot b \geq 0 \iff a \cdot b \in \mathbb{R}^+. \quad \square$$

$a, b \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow a > 0, b > 0$
 • $a > 0 \mid + b$
 $a + b > b$ por axioma 03-Suma
 • Si $b > 0 \longrightarrow a + b > 0$ por Axioma 02-Transitividad
 $a + b \in \mathbb{R}^+$

1.3 Equivalencia con $\mathbb{R}^+$

Una observación importante es que la relación de orden $<$ puede expresarse completamente en términos del conjunto $\mathbb{R}^+$. En efecto, si $a < b$, sumando $-a$ a ambos lados por el axioma O3 obtenemos:

$$a < b \implies a - a < b - a \iff 0 < b - a \iff b - a \in \mathbb{R}^+.$$

Hemos obtenido así la siguiente equivalencia fundamental:

$$a < b \iff b - a \in \mathbb{R}^+$$

Esta equivalencia resulta muy útil en demostraciones, pues convierte un enunciado sobre desigualdades en un enunciado sobre positividad, lo que nos permite aprovechar directamente la cerradura de $\mathbb{R}^+$.



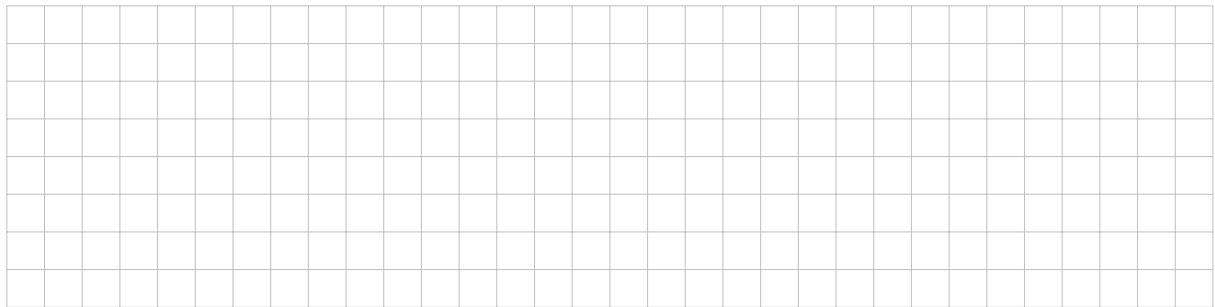
2 Desigualdad $\leq$: Definición

A partir de la relación estricta $<$ podemos definir la desigualdad no estricta de manera natural.

Definición:

1. Decimos que a es **menor o igual que** b , y lo escribimos $a \leq b$, si $a < b$ o $a = b$.
2. De manera similar, decimos que c es **mayor o igual que** d , y lo escribimos $c \geq d$, si $c > d$ o $c = d$.
3. Así, $b \geq a$ significa lo mismo que $a \leq b$.

Por ejemplo, la afirmación $x < 4$ es verdadera si $x = 3$, pero falsa si $x = 4$; mientras que la afirmación $x \leq 4$ es verdadera tanto si $x = 3$ como si $x = 4$.



- Caso 1: $a > 0$. Como $\mathbb{R}^+$ es cerrado bajo prod, $a \in \mathbb{R}^+ \rightarrow a \cdot a > 0 \rightarrow a^2 > 0 \checkmark$
- Caso 2: $a = 0$. $a^2 = 0 \rightarrow a^2 \geq 0 \checkmark$
- Caso 3: $a < 0$. $-a = -a > 0 \rightarrow -a \in \mathbb{R}^+$, cerr. $\odot$. $(-a)(-a) > 0 \rightarrow a^2 > 0 \checkmark$

$a^2 \geq 0 \quad \square$

3.2 Signo del Opuesto e Inverso

Teorema: Sean $a \in \mathbb{R}$. Entonces:

1. Si $a > 0$, entonces $-a < 0$.
2. Si $a < 0$, entonces $-a > 0$.
3. Si $a > 0$, entonces $a^{-1} > 0$.
4. Si $a < 0$, entonces $a^{-1} < 0$.

Demostración del inciso 3: Por contradicción, supongamos que $a^{-1} < 0$. Por el teorema anterior sabemos que $a^2 > 0$ si $a \neq 0$. Entonces:

$$\underline{a^2 \cdot a^{-1} < 0} \iff a < 0.$$

Lo cual es una contradicción con la hipótesis $a > 0$ $\square$



3.3 Multiplicación de una Desigualdad

Teorema (Multiplicación de una desigualdad): Suponga que $a < b$. Entonces:

1. Si $c > 0$, entonces $ac < bc$.
2. Si $c < 0$, entonces $ac > bc$.

El primer inciso es consecuencia directa del axioma O4. El segundo inciso se deduce a partir de los axiomas de orden: si $c < 0$, entonces $-c > 0$, y por O4 se tiene $a(-c) < b(-c)$, es decir $-ac < -bc$, lo que por O3 implica $ac > bc$.

Observación importante: Al multiplicar ambos lados de una desigualdad por un número **negativo**, el sentido de la desigualdad se **invierte**. Este hecho es fundamental y debe tenerse siempre presente al manipular inecuaciones.

$$\begin{aligned} c < 0 &\rightarrow -c > 0 : -c \in \mathbb{R}^+ \\ a &< b \\ \downarrow \cdot (-c) & \\ a(-c) &< b(-c) \\ -ac &< -bc \\ bc &< a \end{aligned}$$

4 Ejemplos y Demostraciones

Ejemplo 1

Usando los axiomas de orden, pruebe que $ad + bc < ac + bd$ si $a < b$ y $c < d$.

Solución: Si $a < b$ y $c < d$ entonces $b - a \in \mathbb{R}^+$ y $d - c \in \mathbb{R}^+$. Como $\mathbb{R}^+$ es cerrado por multiplicación, se sigue que:

$$(b - a)(d - c) \in \mathbb{R}^+ \iff (b - a)(d - c) > 0.$$

Desarrollando los productos obtenemos:

$$bd - bc - ad + ac > 0 \iff ac + bd > ad + bc. \quad \square$$

Ejemplo 1

Usando los axiomas de orden, pruebe que $ad + bc < ac + bd$ si $a < b$ y $c < d$.

$$a < b \wedge c < d$$

$$\underbrace{b - a}_{>0} \wedge \underbrace{d - c}_{>0}$$

$$(b - a) \wedge (d - c) \in \mathbb{R}^+$$

Ax. O4: Prod. cerrado

$$(b - a)(d - c) > 0$$

$$bd - bc - ad + ac > 0$$

$$ac + bd > ad + bc \rightarrow ad + bc < ac + bd //$$

Ejemplo 2

Demuestre que si $0 < a < b$ entonces $a^2 < b^2$.

Solución: Si $a < b$ entonces $b - a > 0$. Por hipótesis $a > 0$ y $b > 0$, luego $a + b > 0$ (ya que $\mathbb{R}^+$ es cerrado bajo la suma). Como $b - a > 0$ y $b + a > 0$, entonces $(b - a)(b + a) > 0$ (ya que $\mathbb{R}^+$ es cerrado bajo el producto). La última desigualdad es equivalente a:

$$b^2 - a^2 > 0 \iff b^2 > a^2,$$

como queríamos probar. $\square$

Ejemplo 2

Demuestre que si $0 < a < b$ entonces $a^2 < b^2$.

$$\left. \begin{array}{l} a > 0 \\ b > 0 \\ b - a > 0 \end{array} \right\} \in \mathbb{R}^+$$

Ax. Suma: $a+b > 0 \in \mathbb{R}^+$
 $b-a > 0$

Ax. Proximo: $(b+a)(b-a) > 0$
 $b^2 - a^2 > 0$
 $b^2 > a^2$ //

Ejemplo 3

Pruebe la **desigualdad de medias** (Media Geométrica $\leq$ Media Aritmética):

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ y $b > 0$.

Solución: Por contradicción, supongamos que $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$. Note que $a+b > 0$ ya que a y b son positivos, luego $\frac{a+b}{2} > 0$. Aplicando lo demostrado en el Ejemplo 2 obtenemos:

$$0 < \frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \implies \frac{(a+b)^2}{4} < ab.$$

Desarrollando los términos obtenemos:

$$a^2 + 2ab + b^2 < 4ab \iff a^2 - 2ab + b^2 < 0 \iff (a-b)^2 < 0,$$

lo cual es una contradicción con el teorema que establece que $(a-b)^2 \geq 0$ para todo real.

□

Ejemplo 3

Pruebe la **desigualdad de medias** (Media Geométrica $\leq$ Media Aritmética):

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ y $b > 0$.

Por contradicción: $\sqrt{ab} > \frac{a+b}{2}$ $\sqrt{ab} \in \mathbb{R}^+$
 $\frac{a+b}{2} \in \mathbb{R}^+$
 $0 < \frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \quad || \cdot 2$
 $(a+b)^2 < 4ab$
 $a^2 + 2ab + b^2 < 4ab \quad / -4ab$
 $a^2 - 2ab + b^2 < 0$
 $(a-b)^2 < 0$ por $\neq 0$

Ejemplo 4

Demuestre que si $0 < a < b$ y $0 < c < d$ entonces $ac < bd$.

Solución: Como $a < b$ y $c > 0$, por el axioma O4 se obtiene que $ac < bc$. Como $c < d$ y $b > 0$, por el axioma O4 se tiene que $bc < bd$. Usando el axioma de transitividad (O2) se sigue que:

$$ac < bc \quad \text{y} \quad bc < bd \implies ac < bd. \quad \square$$

Ejemplo 4

Demuestre que si $0 < a < b$ y $0 < c < d$ entonces $\boxed{ac} < \boxed{bd}$

$$\begin{aligned} 0 &< a < b \\ 0 &< c < d \end{aligned}$$

$c < d$ 1.6 · Ax Prod.

bc < bd

For Transitivity: $a < b$

$$a \leq b \mid \cdot c \cdot \text{AxPred}$$

$$ac \leq bc$$

Ejemplo 5

Demuestre que si $a < b$, entonces $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Solución: Si $a < b$, entonces sumando a a ambos lados de la desigualdad por el axioma O3 se obtiene:

$$a + a < a + b \implies 2a < a + b \implies a < \frac{a+b}{2}.$$

Aplicando el mismo razonamiento, pero ahora sumando b en ambos lados de la desigualdad $a < b$, obtenemos:

$$a + b < b + b \implies a + b < 2b \implies \frac{a+b}{2} < b.$$

Combinando ambas desigualdades se concluye que $a < \frac{a+b}{2} < b$. $\square$

Este resultado tiene una interpretación geométrica natural: el punto medio entre a y b en la recta real siempre se encuentra estrictamente entre ambos extremos.

Ejemplo 5

Demuestre que si $a < b$, entonces $a < \frac{a+b}{2} < b$.

$\text{Si } a < b \quad / +a$	$a < b \quad / +b$
$2a < a+b \quad / :2$	$a+b < 2b \quad / :2$
$a < \frac{a+b}{2}$	$\frac{a+b}{2} < b$
$\underbrace{\hspace{10em}}$	
$a < \frac{a+b}{2} < b \quad //$	

Ejemplo 6

Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $n^2 \geq n$.

Solución: Separamos la demostración en dos casos.

Caso 1: $n \neq 1$. Entonces $n > 1$ y $n > 0$, lo que equivale a $n - 1 \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{R}^+$. Como $\mathbb{R}^+$ es cerrado por multiplicación, entonces:

$$(n - 1) \cdot n \in \mathbb{R}^+ \iff (n - 1) \cdot n > 0 \iff n^2 - n > 0 \iff n^2 > n.$$

Caso 2: $n = 1$. En este caso $1^2 = 1$, luego se cumple que $1^2 \geq 1$.

Por la definición de $\geq$, obtenemos de los casos 1 y 2 que $n^2 \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Ejemplo 6

Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $n^2 \geq n$.

• *Caso 1:* $n \neq 1$. $n > 1$ y $n > 0 \rightarrow n - 1 > 0 \in \mathbb{R}^+$ y $n > 0 \in \mathbb{R}^+$
Ax Prod: $n(n-1) > 0$
 $n^2 - n > 0$
 $n^2 > n$ ✓
• *Caso 2:* $n = 1$. $n = 1 \rightarrow n^2 \geq n$
 $1 \geq 1$ ✓

5 Resumen de Resultados Principales

A lo largo de esta guía hemos establecido los siguientes resultados fundamentales, todos derivados de los cuatro axiomas de orden.

Axiomas base: el sistema $\mathbb{R}$ satisface tricotomía (O1), transitividad (O2), compatibilidad con la suma (O3) y compatibilidad con el producto por positivos (O4).

Cerradura de $\mathbb{R}^+$: la suma y el producto de números positivos es positivo.

Equivalencia fundamental: $a < b \iff b - a \in \mathbb{R}^+$.

Cuadrados: para todo $a \in \mathbb{R}$ se tiene $a^2 \geq 0$, con igualdad solo si $a = 0$.

Signo del inverso: el inverso de un positivo es positivo y el de un negativo es negativo.

Multiplicación por negativo: al multiplicar una desigualdad por un número negativo, el sentido se invierte.

Desigualdad de medias: para $a, b > 0$, se cumple $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Punto medio: si $a < b$, entonces $a < \frac{a+b}{2} < b$.

