

Intro. al Cálculo

Introducción

Los polinomios constituyen una de las familias de funciones más fundamentales del análisis matemático. Su estructura algebraica permite realizar con ellas operaciones aritméticas análogas a las que se realizan con los números enteros: suma, resta, multiplicación y, lo que es el foco de esta guía, **división**. El **Algoritmo de la División para polinomios** establece que, dado un dividendo y un divisor (ambos polinomios), siempre es posible encontrar un cociente y un resto de manera única, en perfecta analogía con la división de números enteros.

Comprender este resultado es esencial para simplificar expresiones racionales, encontrar raíces de polinomios, y sentar las bases del Teorema del Resto y el Teorema del Factor, herramientas indispensables en el estudio del Cálculo.

Objetivos:

- Recordar la definición formal de polinomio, su grado, coeficiente principal y coeficiente constante, junto con la notación $\mathbb{K}[x]$.
- Comprender las propiedades del grado bajo suma y producto de polinomios.
- Enunciar y aplicar el Teorema del Algoritmo de la División para polinomios.
- Ejecutar la división polinomial mediante el proceso largo, obteniendo cociente y resto explícitamente.

1 Polinomios: Definición y Notación

Una de las clases de funciones más importantes en matemáticas es la de los **polinomios**. A continuación se presenta su definición formal.

Definición. Un **polinomio de grado n** es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde n es un número entero no negativo y $a_n \neq 0$. Los números $a_0, a_1, \dots, a_n$ se denominan **coeficientes** del polinomio. El número a_0 es el **coeficiente constante** y el número a_n , correspondiente a la potencia de mayor grado, recibe el nombre de **coeficiente principal**.

Observación. La función constante $P(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ también es un polinomio, pero por convención **no tiene grado asociado**. Por otro lado, denotaremos por $\mathbb{K}[x]$ al conjunto de todos los polinomios con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K}$. En particular, $\mathbb{R}[x]$ denota los polinomios con coeficientes reales y $\mathbb{Q}[x]$ los que tienen coeficientes racionales.

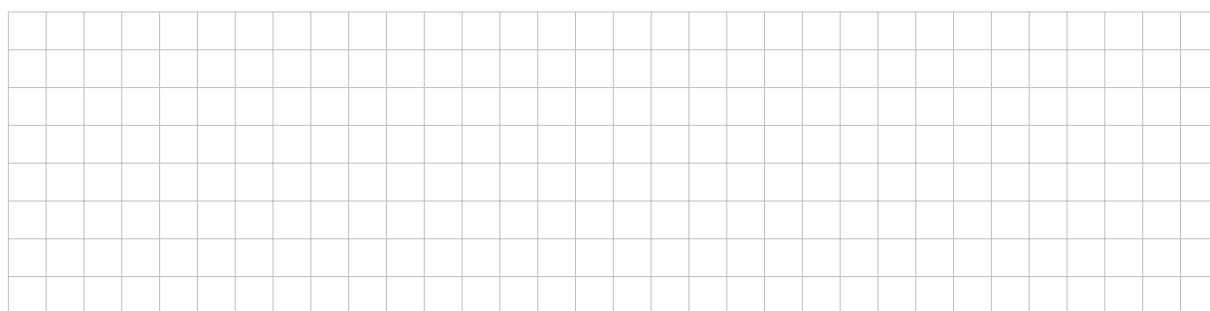
1.1 Ejemplos de identificación de grado y coeficientes

Ejemplo 1

Determine el grado, el coeficiente principal y el coeficiente constante del polinomio $P(x) = 7x^4 + x^3 - 3x^2 - 5$.

Solución: El polinomio está escrito en forma estándar (potencias decrecientes). Identifiquemos directamente:

- El término de mayor potencia es $7x^4$, por lo tanto $\text{grad}(P) = 4$.
- El coeficiente principal es $a_4 = 7$.
- El coeficiente constante es $a_0 = -5$.



Ejemplo 2

Sea $P(x) = 1 + x - x^3 + \sqrt{2}x^7$. Determine si $P \in \mathbb{Q}[x]$ o $P \in \mathbb{R}[x]$.

Solución: Para que un polinomio pertenezca a $\mathbb{Q}[x]$, **todos** sus coeficientes deben ser números racionales. En este caso, el coeficiente de x^7 es $\sqrt{2}$. Como $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, se concluye que $P \notin \mathbb{Q}[x]$. Sin embargo, dado que $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, todos los coeficientes son números reales y por lo tanto $P \in \mathbb{R}[x]$.

2 Propiedades del Grado

Una vez definido el concepto de grado, es natural preguntarse cómo se comporta al operar polinomios. La siguiente proposición responde esta pregunta para la suma y el producto.

Proposición. Para $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, se tiene que:

(a) $\text{grad}(P + Q) \leq \max\{\text{grad}(P), \text{grad}(Q)\}$.

(b) $\text{grad}(P \cdot Q) = \text{grad}(P) + \text{grad}(Q)$.

Nótese que en (a) se tiene una desigualdad y no una igualdad: si los coeficientes principales de P y Q son opuestos, pueden cancelarse al sumar, reduciendo el grado del resultado. En (b) la igualdad es estricta pues en $\mathbb{R}[x]$ el producto de dos números reales no nulos sigue siendo no nulo.

Ejemplo 3

Sean $P(x) = 3 + x - x^2$ y $Q(x) = 5 + x^2$. Calcule $P(x) + Q(x)$ y $P(x) \cdot Q(x)$, y verifique las propiedades del grado.

Solución: Calculamos la suma término a término:

$$P(x) + Q(x) = (3 + x - x^2) + (5 + x^2) = 8 + x.$$

Observamos que $\text{grad}(P) = 2$, $\text{grad}(Q) = 2$, y $\text{grad}(P + Q) = 1 < 2 = \max\{2, 2\}$. Esto ilustra que la cancelación de los términos $-x^2$ y $+x^2$ reduce estrictamente el grado.

Para el producto, multiplicamos cada término de P por cada término de Q :

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (3 + x - x^2)(5 + x^2) \\ &= 15 + 3x^2 + 5x + x^3 - 5x^2 - x^4 = 15 + 5x - 2x^2 + x^3 - x^4. \end{aligned}$$

Entonces $\text{grad}(P \cdot Q) = 4 = 2 + 2 = \text{grad}(P) + \text{grad}(Q)$. ✓

Ejemplo 3

Sean $P(x) = 3 + x - x^2$ y $Q(x) = 5 + x^2$. Calcule $P(x) + Q(x)$ y $P(x) \cdot Q(x)$, y verifique las propiedades del grado.

✓ $(P+Q)(x) = 3+x-\cancel{x^2}+5+\cancel{x^2} = x+8$ $\text{grad}(P+Q)(x) = 1 \leq 2$ ✓

✓ $(P \cdot Q)(x) = (3+x-x^2)(5+x^2) = 15+3x^2+5x+x^3-5x^2-\boxed{x^4}$ $\text{grad}(PQ) = 4 = \text{grad}P + \text{grad}Q$

Ejemplo 4

Sean P , Q y D polinomios tales que $P(x) = D(x)Q(x)$. Si $\text{grad}(P) = 9$ y $\text{grad}(D) = 3$, ¿cuál es el grado de Q ?

Solución: Por la propiedad (b) de la proposición anterior:

$$\text{grad}(P) = \text{grad}(D) + \text{grad}(Q).$$

Despejando:

$$\text{grad}(Q) = \text{grad}(P) - \text{grad}(D) = 9 - 3 = \boxed{6}.$$

Ejemplo 4

Sean P , Q y D polinomios tales que $P(x) = D(x)Q(x)$. Si $\text{grad}(P) = 9$ y $\text{grad}(D) = 3$,
¿cuál es el grado de Q ?

$$\begin{aligned}\text{grad } P &= \text{grad } D + \text{grad } Q \\ 9 &= 3 + \text{grad } Q \\ \text{grad } Q &= 6\end{aligned}$$

3 El Algoritmo de la División

3.1 Motivación

La división de polinomios es completamente análoga a la división de números enteros. Recordemos que al dividir 38 entre 7, obtenemos cociente 5 y resto 3, lo que se escribe como:

$$\frac{38}{7} = 5 + \frac{3}{7}, \quad \text{es decir,} \quad 38 = 7 \cdot 5 + 3.$$

El resto 3 satisface $0 \leq 3 < 7$. De manera completamente análoga, para polinomios tendremos un cociente $Q(x)$ y un resto $R(x)$ cuyo grado es estrictamente menor que el del divisor.

3.2 Enunciado del Teorema

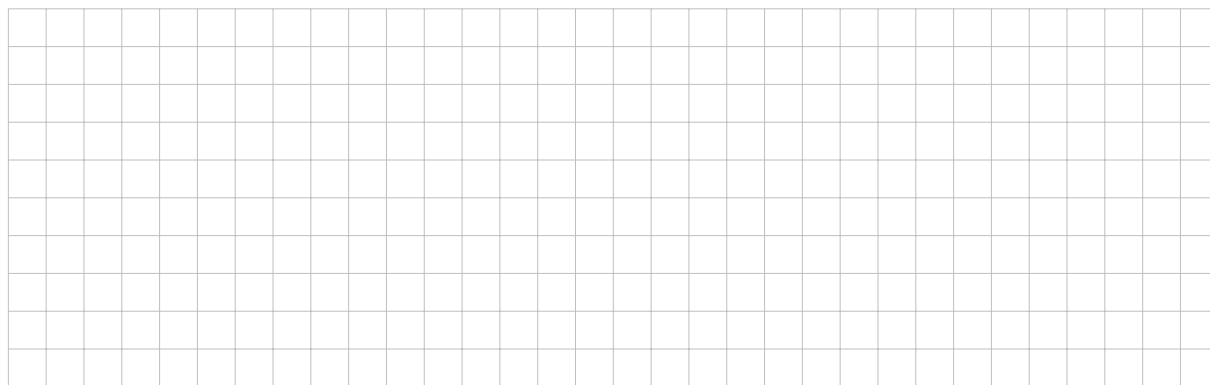
Teorema (Algoritmo de la División). Si $P, D \in \mathbb{R}[x]$ con $\text{grad}(P) \geq \text{grad}(D)$, entonces existen polinomios únicos $Q, R \in \mathbb{R}[x]$ tales que

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x), \quad \frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

con $0 \leq \text{grad}(R) < \text{grad}(D)$ o bien $R \equiv 0$.

Los polinomios $P(x)$ y $D(x)$ se denominan **dividendo** y **divisor**, respectivamente; $Q(x)$ es el **cociente** y $R(x)$ es el **resto** (o residuo).

Observación importante. La condición sobre el grado del resto, $\text{grad}(R) < \text{grad}(D)$, garantiza la *unicidad* de la descomposición. Si el divisor es lineal, es decir, $\text{grad}(D) = 1$, entonces el resto es necesariamente una constante (o el polinomio cero).



3.3 División por un polinomio lineal

Ejemplo 5

Divida $6x^2 - 26x + 12$ entre $x - 4$. Es decir, encuentre $Q(x)$ y $R(x)$ tales que

$$6x^2 - 26x + 12 = (x - 4) \cdot Q(x) + R(x).$$

Solución: Aplicamos el proceso de división larga de polinomios.

Paso 1. Dividimos el término líder del dividendo entre el término líder del divisor:

$$\frac{6x^2}{x} = 6x.$$

Este es el primer término del cociente.

Paso 2. Multiplicamos $6x$ por el divisor $(x - 4)$ y restamos del dividendo:

$$6x^2 - 26x + 12 - 6x(x - 4) = 6x^2 - 26x + 12 - (6x^2 - 24x) = -2x + 12.$$

Paso 3. Repetimos con el nuevo dividendo $-2x + 12$. Dividimos el término líder:

$$\frac{-2x}{x} = -2.$$

Multiplicamos -2 por $(x - 4)$ y restamos:

$$-2x + 12 - (-2)(x - 4) = -2x + 12 - (-2x + 8) = 4.$$

Paso 4. El resto es $R(x) = 4$, con $\text{grad}(R) = 0 < 1 = \text{grad}(D)$. Por lo tanto:

$$\boxed{Q(x) = 6x - 2, \quad R(x) = 4.}$$

Verificación: $(x - 4)(6x - 2) + 4 = 6x^2 - 2x - 24x + 8 + 4 = 6x^2 - 26x + 12. \checkmark$

Ejemplo 5

Divida $6x^2 - 26x + 12$ entre $x - 4$. Es decir, encuentre $Q(x)$ y $R(x)$ tales que

$$6x^2 - 26x + 12 = (x - 4) \cdot Q(x) + R(x).$$

Handwritten solution for the polynomial division of $6x^2 - 26x + 12$ by $x - 4$.

The division is performed as follows:

$$\begin{array}{r} 6x^2 - 26x + 12 \div x - 4 \\ \underline{6x^2 - 24x} \\ -2x + 12 \\ \underline{-2x + 8} \\ 4 \end{array}$$

Annotations in the image:

- $6x^2$ and x are labeled "Divide los términos principales" (Divide the main terms).
- $6x^2 - 24x$ is labeled "Mult por el DUV" (Multiply by the DUV).
- $-2x + 12$ and $-2x + 8$ are labeled "Restar" (Subtract).
- The final result is $Q(x) = 6x - 2$ and $R(x) = 4$.

Verification:

$$\begin{aligned} P(x) &= D(x)Q(x) + R(x) \\ 6x^2 - 26x + 12 &= (x - 4)(6x - 2) + 4 \\ &= 6x^2 - 2x - 24x + 8 + 4 \\ &= 6x^2 - 26x + 12 \end{aligned}$$

3.4 División por un polinomio de grado mayor

Ejemplo 6

Sean $P(x) = 8x^4 + 6x^2 - 3x + 1$ y $D(x) = 2x^2 - x + 2$. Encuentre polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ tales que $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$.

Solución: Notemos que en $P(x)$ el término en x^3 tiene coeficiente nulo; escribimos $P(x) = 8x^4 + 0x^3 + 6x^2 - 3x + 1$ para llevar el proceso con cuidado.

Paso 1. $\frac{8x^4}{2x^2} = 4x^2$. Multiplicamos y restamos:

$$8x^4 + 0x^3 + 6x^2 - 3x + 1 - 4x^2(2x^2 - x + 2) = 8x^4 - 8x^4 + 0x^3 + 4x^3 + 6x^2 - 8x^2 - 3x + 1 = 4x^3 - 2x^2 - 3x + 1.$$

Paso 2. $\frac{4x^3}{2x^2} = 2x$. Multiplicamos y restamos:

$$4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 - 2x(2x^2 - x + 2) = 4x^3 - 4x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 3x - 4x + 1 = -7x + 1.$$

Paso 3. $\text{grad}(-7x + 1) = 1 < 2 = \text{grad}(D)$. El proceso termina.

Por lo tanto:

$$Q(x) = 4x^2 + 2x, \quad R(x) = -7x + 1.$$

Verificación: $(2x^2 - x + 2)(4x^2 + 2x) + (-7x + 1)$

$$= 8x^4 + 4x^3 - 4x^3 - 2x^2 + 8x^2 + 4x - 7x + 1 = 8x^4 + 6x^2 - 3x + 1. \checkmark$$

Ejemplo 6

Sean $P(x) = 8x^4 + 6x^2 - 3x + 1$ y $D(x) = 2x^2 - x + 2$. Encuentre polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ tales que $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$.

$$\begin{array}{r} \boxed{8x^4} + 6x^2 - 3x + 1 \quad \big| \quad \boxed{2x^2} - x + 2 \\ \underline{8x^4 - 4x^3 + 8x^2} \\ 4x^3 - 7x^2 - 3x + 1 \\ \underline{4x^3 - 2x^2 + 4x} \\ -7x + 1 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 4x^2 + 2x \\ -7x + 1 \end{array} \right\} Q(x)$$

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$$

$$\begin{aligned} 8x^4 + 6x^2 - 3x + 1 &= (2x^2 - x + 2)(4x^2 + 2x) + (-7x + 1) \\ &= 8x^4 + 4x^3 - 4x^3 - 7x^2 + 8x^2 + 4x - 7x + 1 \\ &= 8x^4 + 6x^2 - 3x + 1 \end{aligned}$$

3.5 Ejercicio integrador

Ejemplo 7

Dados los polinomios $P(x) = 3x^4 - 6x^3 + 3x^2 - x + 2$ y $D(x) = x^2 - 2x + 3$:

- (a) Determine el grado del polinomio cociente que resulta al dividir P en D .
- (b) Determine los posibles grados del resto que resulta al dividir P en D .
- (c) Calcule el cociente y el resto que resultan al dividir P en D .

Solución:

Parte (a). Por la propiedad del grado del producto, si $P = D \cdot Q + R$ con $\text{grad}(R) < \text{grad}(D) = 2$, entonces el término dominante de P proviene de $D \cdot Q$, lo que implica:

$$\text{grad}(Q) = \text{grad}(P) - \text{grad}(D) = 4 - 2 = \boxed{2}.$$

Parte (b). Por el Algoritmo de la División, el resto satisface $\text{grad}(R) < \text{grad}(D) = 2$, o bien $R \equiv 0$. Por lo tanto, los posibles grados del resto son: $R \equiv 0$ (sin grado), $\text{grad}(R) = 0$ (constante no nula) o $\text{grad}(R) = 1$ (lineal).

Parte (c). Realizamos la división larga.

Paso 1. $\frac{3x^4}{x^2} = 3x^2$. Multiplicamos y restamos:

$$3x^4 - 6x^3 + 3x^2 - x + 2 - 3x^2(x^2 - 2x + 3) = 3x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 3x^4 + 6x^3 - 9x^2 - x + 2 = -6x^2 - x + 2.$$

Paso 2. $\frac{-6x^2}{x^2} = -6$. Multiplicamos y restamos:

$$-6x^2 - x + 2 - (-6)(x^2 - 2x + 3) = -6x^2 - x + 2 + 6x^2 - 12x + 18 = -13x + 20.$$

Paso 3. $\text{grad}(-13x + 20) = 1 < 2 = \text{grad}(D)$. El proceso concluye.

Por lo tanto:

$Q(x) = 3x^2 - 6,$

 $R(x) = -13x + 20.$

Verificación:

$$\begin{aligned} & (x^2 - 2x + 3)(3x^2 - 6) + (-13x + 20) \\ &= 3x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 6x^2 + 12x - 18 - 13x + 20 = 3x^4 - 6x^3 + 3x^2 - x + 2. \checkmark \end{aligned}$$

Dados los polinomios $P(x) = 3x^4 - 6x^3 + 3x^2 - x + 2$ y $D(x) = x^2 - 2x + 3$:

- $$\begin{aligned} \frac{P(x)}{D(x)} &= Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \quad | \cdot D(x) \\ P(x) &= D(x) \cdot Q(x) + R(x) \quad | : \text{grad} \dots \\ \text{grad } P(x) &\leq \max(\text{grad } D(x) \cdot Q(x), \text{grad } R(x)) \\ \text{grad } P(x) &= \text{grad } D(x) \cdot Q(x) \\ 4 &= 2 + \text{grad } R \\ \text{grad } R &= 2 \end{aligned}$$

$$\cdot \frac{p(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \quad | \cdot D(x)$$

$$P(x) = \boxed{D(x) \cdot Q(x)} + R(x) \quad / : \text{grad} \dots$$

$$\text{grad } P(x) \leq \max(\text{grad } D(u) Q(u), \text{grad } R(u))$$

$$\underline{\text{grad } P(x)} = \text{grad } DQ(x)$$

$$4 = 2 + \int_{\text{grad } Q}$$

① $\text{grad } Q = 2$

$$\begin{array}{r} \textcircled{e} \quad \boxed{3x^4} - 6x^3 + 3x^2 - x + 2 \quad | \quad \boxed{x^2} - 2x + 3 \\ \underline{- 3x^4 - 6x^3 + 9x^2} \quad \quad \quad 3x^2 - 6 \\ \underline{- 6x^2 - x + 2} \quad \quad \quad \\ \underline{- 4x^2 + 12x - 18} \\ \underline{- 13x + 20} \end{array}$$

Resumen

Los conceptos y resultados centrales de esta guía se articulan de la siguiente manera. Un **polinomio de grado n** tiene la forma $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ con $a_n \neq 0$. El conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ se denota $\mathbb{K}[x]$. Para la suma de polinomios se tiene $\text{grad}(P + Q) \leq \max\{\text{grad}(P), \text{grad}(Q)\}$, con posible cancelación del término líder, mientras que para el producto se cumple la igualdad $\text{grad}(P \cdot Q) = \text{grad}(P) + \text{grad}(Q)$.

El resultado principal es el **Teorema del Algoritmo de la División**: dados $P, D \in \mathbb{R}[x]$ con $\text{grad}(P) \geq \text{grad}(D)$, existen únicos $Q, R \in \mathbb{R}[x]$ con

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x), \quad \text{grad}(R) < \text{grad}(D) \text{ o } R \equiv 0.$$

El proceso para encontrar Q y R es la **división larga de polinomios**, cuyo procedimiento repite iterativamente: dividir el término líder del dividendo entre el del divisor, multiplicar, y restar, hasta que el grado del polinomio restante sea menor que el grado del divisor.

