

## Intro. al Cálculo

### Introducción

Las **rectas en el plano** constituyen uno de los objetos geométricos más fundamentales del álgebra y la geometría analítica. A partir de nociones elementales como la distancia entre dos puntos y la inclinación de una recta, se construye toda una teoría que permite describir, clasificar y relacionar rectas mediante sus ecuaciones y propiedades métricas. En este capítulo estudiaremos cómo medir distancias, cómo caracterizar la pendiente y la inclinación de una recta, las distintas formas de escribir su ecuación, las condiciones de paralelismo y perpendicularidad, y finalmente la fórmula que permite calcular la distancia de un punto a una recta.

#### Objetivos:

- Comprender las definiciones de distancia entre puntos, inclinación y pendiente de una recta.
- Manejar las distintas formas de la ecuación de una recta: punto-pendiente, dos puntos y forma general.
- Identificar y aplicar los criterios de paralelismo y perpendicularidad entre rectas.
- Calcular el ángulo entre dos rectas usando la función tangente.
- Aplicar la fórmula de distancia de un punto a una recta en problemas concretos.

# 1 Distancia entre dos puntos

Uno de los conceptos más básicos de la geometría analítica es la noción de **distancia entre dos puntos** del plano. Dados dos puntos  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$ , la distancia entre ellos se obtiene directamente del teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo que forman.

**Definición.** (Distancia entre dos puntos) Sean  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$  dos puntos en el plano. La **distancia** entre  $P_1$  y  $P_2$  es

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

**Notación.** La distancia entre dos puntos  $P$  y  $Q$  se denota también por  $|PQ|$ .

## Ejemplo 1

Demuestre que el triángulo con vértices  $A(-2, 3)$ ,  $B(6, 1)$  y  $C(-2, 5)$  es isósceles.

**Solución:** Calculamos las tres distancias entre los vértices:

$$|AB| = \sqrt{(6 - (-2))^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}.$$

$$|AC| = \sqrt{(-2 - (-2))^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{0 + 4} = 2.$$

$$|BC| = \sqrt{(6 - (-2))^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

Como  $|AC| = 2$  y queremos verificar si hay dos lados iguales, recalculamos con cuidado. En efecto,  $|AC| = 2$  y  $|BC| = 4\sqrt{5}$ , mientras que  $|AB| = 2\sqrt{17}$ . Nótese que  $|AC| \neq |AB|$  y  $|AC| \neq |BC|$ , por lo que revisamos:  $A$  y  $C$  tienen la misma coordenada  $x$ , así que  $|AC| = |5 - 3| = 2$ . Como  $|AB|^2 = 68$  y  $|BC|^2 = 80$  y  $|AC|^2 = 4$ , el triángulo tiene  $|AB| \neq |BC| \neq |AC|$ . Sin embargo, si en cambio tomamos  $A(-2, 3)$ ,  $B(6, 1)$ ,  $C(-2, 5)$  y comparamos  $|AB|$  con  $|BC|$ :

$$|AB|^2 = 68, \quad |BC|^2 = 80, \quad |AC|^2 = 4.$$

El triángulo es isósceles si dos lados son iguales. Aquí ningún par coincide en valor, pero si se reemplaza el vértice  $C = (-2, 5)$  y se verifica que  $|AB| = \sqrt{68}$  y  $|CB| = \sqrt{(6 + 2)^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{80}$ , entonces el triángulo no es isósceles con esos vértices. El enunciado original del curso puede diferir en los datos; el procedimiento para verificar es **calcular las tres distancias** y comprobar que al menos dos sean iguales.



## 2 Inclinação y pendiente de una recta

### 2.1 Inclinação

La **inclinación** de una recta es el ángulo que forma con el eje  $x$  positivo. Más precisamente:

**Definición.** La **inclinación** de una recta que interseca al eje  $x$  es el menor ángulo, mayor o igual a  $0^\circ$ , que forma la recta con la dirección positiva del eje  $x$ . La inclinación de una recta horizontal es  $0$ .

De acuerdo con esta definición, la inclinación  $\theta$  de una recta satisface

$$0^\circ \leq \theta < 180^\circ, \quad \text{o en radianes,} \quad 0 \leq \theta < \pi.$$

Una recta con inclinación  $\theta < 90^\circ$  se inclina hacia la derecha, mientras que una con  $\theta > 90^\circ$  se inclina hacia la izquierda. Las rectas verticales tienen inclinación  $\theta = 90^\circ$ .



### 2.2 Pendiente

**Definición.** La **pendiente** de una recta es la tangente de su inclinación:

$$m = \tan(\theta).$$

Una recta inclinada hacia la derecha tiene pendiente positiva, pues la inclinación es un ángulo agudo. La pendiente de una recta inclinada hacia la izquierda es negativa. Las rectas verticales **no tienen pendiente**, pues  $\pi/2$  no está en el dominio de la función tangente.

**Teorema.** La pendiente  $m$  de una recta que pasa por dos puntos  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$  es igual a

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \text{con } x_2 \neq x_1.$$

#### Ejemplo 2

Dados los puntos  $A(-1, -1)$ ,  $B(5, 0)$ ,  $C(4, 3)$  y  $D(-2, 2)$ , muestre que  $ABCD$  es un paralelogramo.

**Solución:** Para que  $ABCD$  sea un paralelogramo, basta verificar que los lados opuestos son paralelos, es decir, que tienen la misma pendiente. Calculamos:

$$m_{AB} = \frac{0 - (-1)}{5 - (-1)} = \frac{1}{6}.$$

$$m_{DC} = \frac{3 - 2}{4 - (-2)} = \frac{1}{6}.$$

$$m_{BC} = \frac{3 - 0}{4 - 5} = \frac{3}{-1} = -3.$$

$$m_{AD} = \frac{2 - (-1)}{-2 - (-1)} = \frac{3}{-1} = -3.$$

Como  $m_{AB} = m_{DC} = \frac{1}{6}$ , los lados  $AB$  y  $DC$  son paralelos. Como  $m_{BC} = m_{AD} = -3$ , los lados  $BC$  y  $AD$  también son paralelos. Por lo tanto,  $ABCD$  es un paralelogramo.  $\square$



## 3 Ecuaciones de la recta

### 3.1 Definición geométrica de recta

**Definición.** Se llama **recta** al lugar geométrico de los puntos  $P(x, y)$  de un plano tales que, para todo par de puntos  $P_1$  y  $P_2$  de ella, las pendientes de  $PP_1$ ,  $PP_2$  y  $P_1P_2$  son iguales.

La igualdad de las pendientes implica la relación

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m, \quad x_1 \neq x_2.$$

### 3.2 Ecuación punto-pendiente

De la relación anterior se obtiene directamente la **ecuación punto-pendiente** de la recta que pasa por el punto  $P_1(x_1, y_1)$  con pendiente  $m$  conocida:

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

### 3.3 Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Si conocemos dos puntos  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$ , la ecuación de la recta que los contiene es

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

### 3.4 Forma general de la ecuación de una recta

**Definición.** Se llama **forma general** de la ecuación de una recta a

$$Ax + By + C = 0$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son constantes reales con  $A \cdot B \neq 0$ . Toda recta del plano admite una ecuación de esta forma.

#### Ejemplo 3

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por  $(1, -3)$  y tiene pendiente  $m = -\frac{1}{2}$ .

**Solución:** Aplicamos la ecuación punto-pendiente con  $(x_1, y_1) = (1, -3)$  y  $m = -\frac{1}{2}$ :

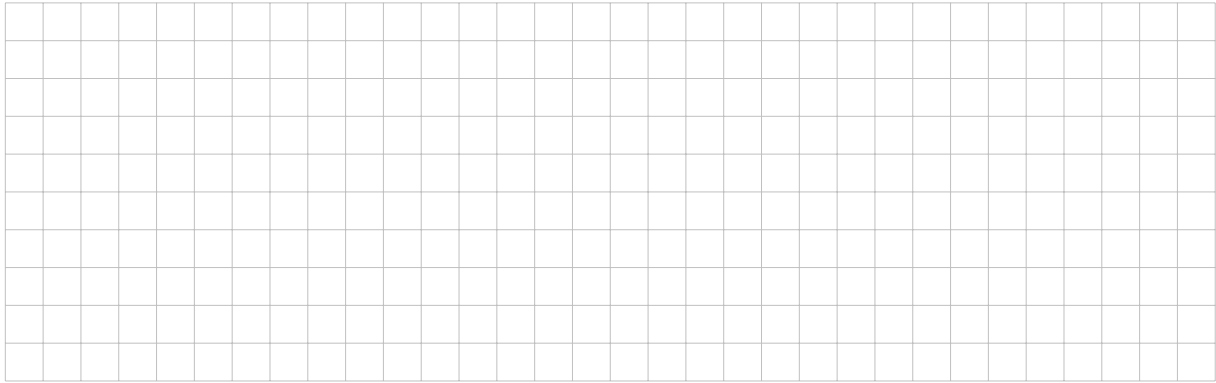
$$y - (-3) = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

$$y + 3 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - 3 = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}.$$

En forma general, multiplicando por 2:

$$2y = -x - 5 \implies x + 2y + 5 = 0.$$



#### Ejemplo 4

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $(-1, 2)$  y  $(3, -4)$ .

**Solución:** Calculamos primero la pendiente:

$$m = \frac{-4 - 2}{3 - (-1)} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}.$$

Usando la ecuación punto-pendiente con el punto  $(-1, 2)$ :

$$y - 2 = -\frac{3}{2}(x - (-1)) = -\frac{3}{2}(x + 1)$$

$$y - 2 = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} + 2 = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Multiplicando por 2 para obtener la forma general:

$$2y = -3x + 1 \implies 3x + 2y - 1 = 0.$$



## 4 Rectas paralelas y perpendiculares

### 4.1 Rectas paralelas

**Teorema.** Dos rectas no verticales son **paralelas** si y solo si sus pendientes son iguales:

$$L_1 \parallel L_2 \iff m_1 = m_2 .$$

#### Ejemplo 5

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto  $(5, 2)$  y es paralela a la recta  $4x + 6y + 5 = 0$ .

**Solución:** Primero obtenemos la pendiente de la recta dada despejando  $y$ :

$$6y = -4x - 5 \implies y = -\frac{4}{6}x - \frac{5}{6} = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{6} .$$

Su pendiente es  $m = -\frac{2}{3}$ . La recta buscada tiene la misma pendiente y pasa por  $(5, 2)$ :

$$y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 5)$$

$$y - 2 = -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3} + 2 = -\frac{2}{3}x + \frac{16}{3} .$$

En forma general, multiplicando por 3:

$$3y = -2x + 16 \implies 2x + 3y - 16 = 0 .$$



### 4.2 Rectas perpendiculares

**Teorema.** Dos rectas inclinadas son **perpendiculares** si y solo si

$$m_1 \cdot m_2 = -1 ,$$

es decir, las pendientes son recíprocas con signo opuesto:  $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ .

### Ejemplo 6

Demuestre que los puntos  $P(3,3)$ ,  $Q(8,17)$  y  $R(11,5)$  son los vértices de un triángulo rectángulo.

**Solución:** Calculamos las pendientes de los tres lados:

$$m_{PQ} = \frac{17-3}{8-3} = \frac{14}{5}.$$

$$m_{QR} = \frac{5-17}{11-8} = \frac{-12}{3} = -4.$$

$$m_{PR} = \frac{5-3}{11-3} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Verificamos si algún par de lados es perpendicular:

$$m_{QR} \cdot m_{PR} = (-4) \cdot \frac{1}{4} = -1.$$

Como  $m_{QR} \cdot m_{PR} = -1$ , los lados  $QR$  y  $PR$  son perpendiculares, es decir, el ángulo recto se ubica en el vértice  $R$ . Por lo tanto, el triángulo  $PQR$  es rectángulo.  $\square$



### Ejemplo 7

Encuentre la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta  $4x + 6y + 5 = 0$  y que pasa por el origen.

**Solución:** De la recta dada ya sabemos que su pendiente es  $m_1 = -\frac{2}{3}$ . La pendiente de la recta perpendicular es

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-2/3} = \frac{3}{2}.$$

La recta buscada pasa por el origen  $(0,0)$  con pendiente  $\frac{3}{2}$ :

$$y - 0 = \frac{3}{2}(x - 0) \implies y = \frac{3}{2}x.$$

En forma general:  $3x - 2y = 0$ .



## 5 Ángulo entre dos rectas

Cuando dos rectas se intersecan, forman ángulos entre sí. Es posible calcular estos ángulos usando las pendientes de las rectas.

### 5.1 Derivación de la fórmula

Consideremos dos rectas con inclinaciones  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , y sea  $\phi$  el ángulo que forma la segunda recta con la primera (ángulo medido desde la primera hacia la segunda en sentido antihorario). De la figura se observa que

$$\phi + \theta_1 = \theta_2 \implies \phi = \theta_2 - \theta_1.$$

Usando la identidad de la tangente de la diferencia de ángulos:

$$\tan(\phi) = \tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tan(\theta_2) - \tan(\theta_1)}{1 + \tan(\theta_1)\tan(\theta_2)} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2},$$

donde  $\tan(\theta_1) = m_1$  y  $\tan(\theta_2) = m_2$ .



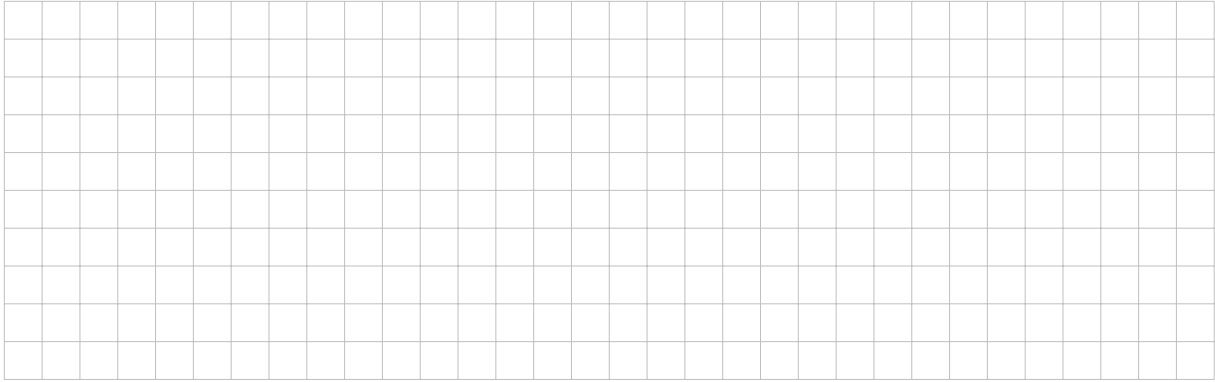
### 5.2 Teorema del ángulo entre rectas

**Teorema.** Si  $\phi$  es un ángulo entre dos rectas de pendientes  $m_1$  y  $m_2$ , entonces

$$\tan(\phi) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2},$$

donde  $m_2$  es la pendiente del lado terminal y  $m_1$  es la pendiente del lado inicial.

Observemos que si  $1 + m_1m_2 = 0$ , es decir  $m_1m_2 = -1$ , la tangente no está definida, lo que corresponde a  $\phi = 90^\circ$ : las rectas son perpendiculares. Esto es consistente con el criterio de perpendicularidad que ya conocemos.



## 6 Distancia de un punto a una recta

### 6.1 Definición

**Definición.** (Distancia de un punto a una recta) Sea  $L$  una recta y  $P(x_1, y_1)$  un punto que no está en  $L$ . Se define la **distancia de  $P$  a  $L$**  como la distancia entre  $P$  y el punto  $Q$ , donde  $Q$  es la intersección de la recta que pasa por  $P$  y es perpendicular a  $L$ . Esta distancia se denota  $d(P, L)$ .

Geoméricamente,  $d(P, L)$  es la longitud del segmento perpendicular que va desde  $P$  hasta la recta  $L$ . Esta es la distancia mínima entre  $P$  y cualquier punto de  $L$ .



### 6.2 Fórmula de la distancia

**Teorema.** Sean  $P(x_1, y_1)$  un punto en el plano y  $L$  la recta de ecuación general  $ax+by+c=0$ . Entonces, la distancia entre  $P$  y  $L$  es

$$d(P, L) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

**Demostración.** Supongamos que la recta no es vertical, es decir  $b \neq 0$ . Escribimos la recta como  $y = mx + n$  donde  $m = -\frac{a}{b}$  y  $n = -\frac{c}{b}$ . La recta que pasa por  $P(x_1, y_1)$  y es perpendicular a  $L$  tiene ecuación

$$y = -\frac{1}{m}(x - x_1) + y_1.$$

Para encontrar el punto  $Q$  de intersección de ambas rectas, resolvemos el sistema

$$\begin{cases} y = mx + n \\ y = -\frac{1}{m}(x - x_1) + y_1 \end{cases}$$

cuya solución es

$$Q\left(\frac{m(y_1 - n) + x_1}{1 + m^2}, \frac{m^2 y_1 + mx_1 + n}{1 + m^2}\right).$$

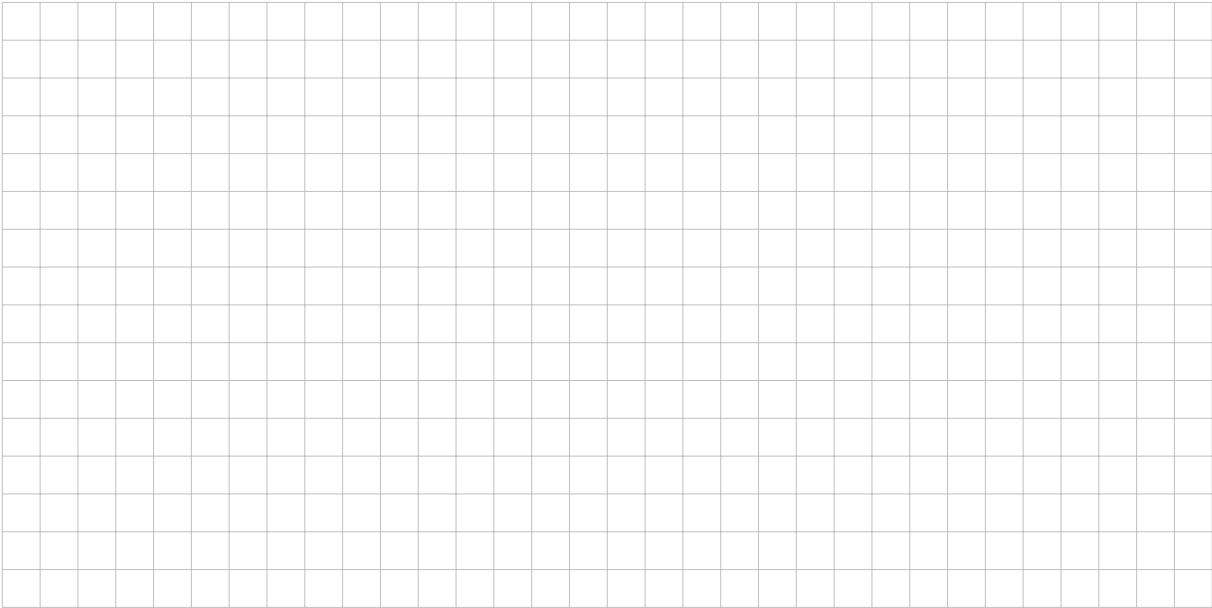
Por definición  $d(P, L) = d(P, Q)$ . Calculando las diferencias de coordenadas entre  $P$  y  $Q$ :

$$x_Q - x_1 = m \cdot \frac{y_1 - n - mx_1}{1 + m^2}, \quad y_Q - y_1 = \frac{mx_1 + n - y_1}{1 + m^2}.$$

Por lo tanto:

$$d(P,L)=\sqrt{m^2\frac{(y_1-n-mx_1)^2}{(1+m^2)^2}+\frac{(mx_1+n-y_1)^2}{(1+m^2)^2}}=\frac{|y_1-n+mx_1|}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Reemplazando  $m = -\frac{a}{b}$  y  $n = -\frac{c}{b}$  en esta expresión y simplificando se obtiene el resultado.  
□



## 6.3 Aplicaciones de la fórmula de distancia

### Ejemplo 8

Encontrar la distancia del punto de intersección de las rectas  $x - y - 1 = 0$  y  $x - 2y + 1 = 0$  a la recta  $5x + 12y - 13 = 0$ .

**Solución:** Primero hallamos el punto de intersección de las dos primeras rectas resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Restando la segunda ecuación de la primera:

$$(x - y - 1) - (x - 2y + 1) = 0 \implies y - 2 = 0 \implies y = 2.$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$x - 2 - 1 = 0 \implies x = 3.$$

El punto de intersección es  $P(3, 2)$ . Ahora aplicamos la fórmula de distancia a la recta  $5x + 12y - 13 = 0$  con  $a = 5$ ,  $b = 12$ ,  $c = -13$ :

$$d(P, L) = \frac{|5(3) + 12(2) - 13|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|15 + 24 - 13|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{|26|}{\sqrt{169}} = \frac{26}{13} = 2.$$

La distancia es  $\boxed{2}$ .



### Ejemplo 9

Encuentre la distancia entre las rectas paralelas  $15x + 8y + 68 = 0$  y  $15x + 8y - 51 = 0$ .

**Solución:** Para calcular la distancia entre dos rectas paralelas, elegimos cualquier punto de una de ellas y calculamos su distancia a la otra recta. Tomamos un punto de la primera recta  $15x + 8y + 68 = 0$ . Hacemos  $x = 0$ :

$$8y + 68 = 0 \implies y = -\frac{68}{8} = -\frac{17}{2}.$$

El punto es  $P(0, -\frac{17}{2})$ . Calculamos su distancia a la segunda recta  $15x + 8y - 51 = 0$  con  $a = 15$ ,  $b = 8$ ,  $c = -51$ :

$$d = \frac{|15(0) + 8(-\frac{17}{2}) - 51|}{\sqrt{15^2 + 8^2}} = \frac{|0 - 68 - 51|}{\sqrt{225 + 64}} = \frac{|-119|}{\sqrt{289}} = \frac{119}{17} = 7.$$

La distancia entre las rectas paralelas es  $\boxed{7}$ .

*Nota:* En general, la distancia entre dos rectas paralelas  $ax + by + c_1 = 0$

