

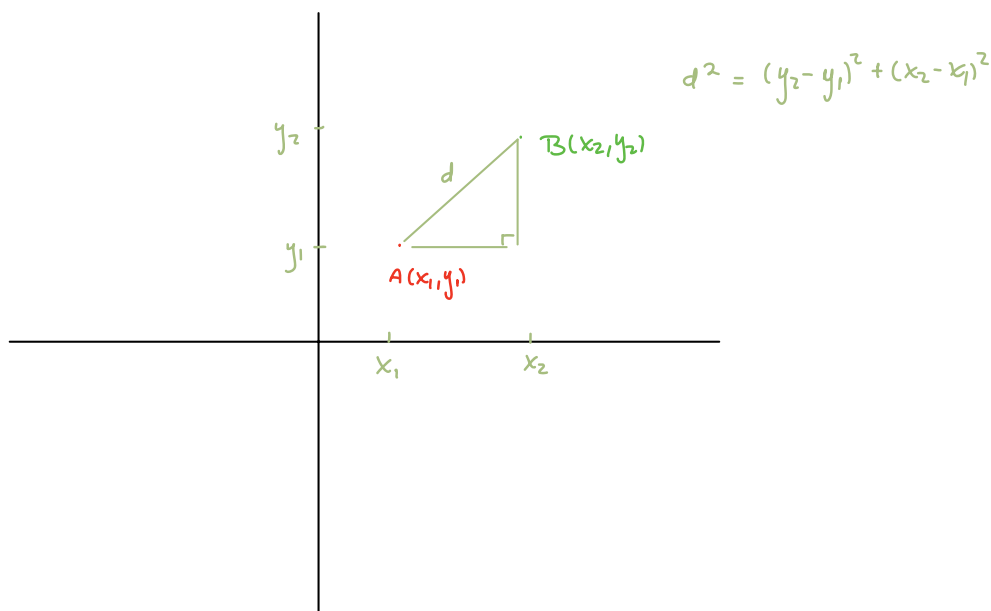
Intro. al Cálculo

Introducción

Las **rectas en el plano** constituyen uno de los objetos geométricos más fundamentales del álgebra y la geometría analítica. A partir de nociones elementales como la distancia entre dos puntos y la inclinación de una recta, se construye toda una teoría que permite describir, clasificar y relacionar rectas mediante sus ecuaciones y propiedades métricas. En este capítulo estudiaremos cómo medir distancias, cómo caracterizar la pendiente y la inclinación de una recta, las distintas formas de escribir su ecuación, las condiciones de paralelismo y perpendicularidad, y finalmente la fórmula que permite calcular la distancia de un punto a una recta.

Objetivos:

- Comprender las definiciones de distancia entre puntos, inclinación y pendiente de una recta.
- Manejar las distintas formas de la ecuación de una recta: punto-pendiente, dos puntos y forma general.
- Identificar y aplicar los criterios de paralelismo y perpendicularidad entre rectas.
- Calcular el ángulo entre dos rectas usando la función tangente.
- Aplicar la fórmula de distancia de un punto a una recta en problemas concretos.



1 Distancia entre dos puntos

Uno de los conceptos más básicos de la geometría analítica es la noción de **distancia entre dos puntos** del plano. Dados dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, la distancia entre ellos se obtiene directamente del teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo que forman.

Definición. (Distancia entre dos puntos) Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos en el plano. La **distancia** entre P_1 y P_2 es

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Notación. La distancia entre dos puntos P y Q se denota también por $|PQ|$.

Ejemplo 1

Demuestre que el triángulo con vértices $A(-2, 3)$, $B(6, 1)$ y $C(-2, 5)$ es isósceles.

Solución: Calculamos las tres distancias entre los vértices:

$$|AB| = \sqrt{(6 - (-2))^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}.$$

$$|AC| = \sqrt{(-2 - (-2))^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{0 + 4} = 2.$$

$$|BC| = \sqrt{(6 - (-2))^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

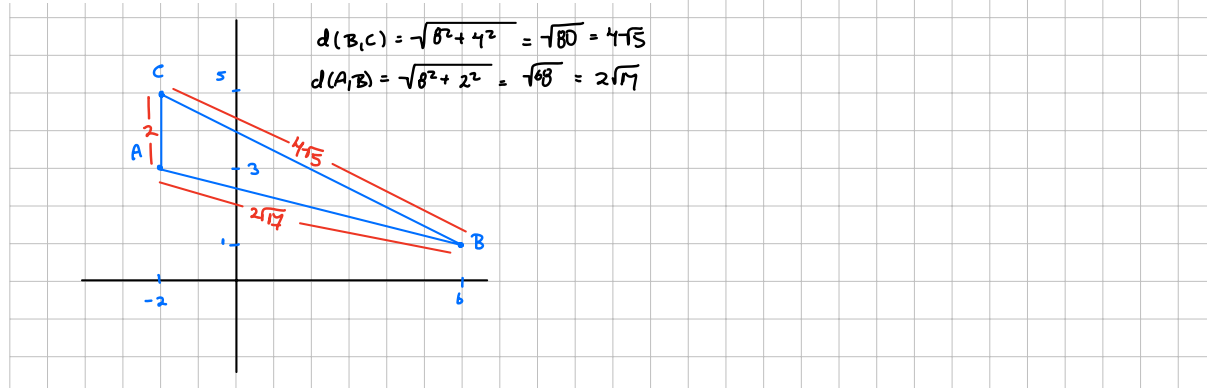
Como $|AC| = 2$ y queremos verificar si hay dos lados iguales, recalculamos con cuidado. En efecto, $|AC| = 2$ y $|BC| = 4\sqrt{5}$, mientras que $|AB| = 2\sqrt{17}$. Nótese que $|AC| \neq |AB|$ y $|AC| \neq |BC|$, por lo que revisamos: A y C tienen la misma coordenada x , así que $|AC| = |5 - 3| = 2$. Como $|AB|^2 = 68$ y $|BC|^2 = 80$ y $|AC|^2 = 4$, el triángulo tiene $|AB| \neq |BC| \neq |AC|$. Sin embargo, si en cambio tomamos $A(-2, 3)$, $B(6, 1)$, $C(-2, 5)$ y comparamos $|AB|$ con $|BC|$:

$$|AB|^2 = 68, \quad |BC|^2 = 80, \quad |AC|^2 = 4.$$

El triángulo es isósceles si dos lados son iguales. Aquí ningún par coincide en valor, pero si se reemplaza el vértice $C = (-2, 5)$ y se verifica que $|AB| = \sqrt{68}$ y $|CB| = \sqrt{(6 + 2)^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{80}$, entonces el triángulo no es isósceles con esos vértices. El enunciado original del curso puede diferir en los datos; el procedimiento para verificar es **calcular las tres distancias** y comprobar que al menos dos sean iguales.

Ejemplo 1

Demuestre que el triángulo con vértices $A(-2, 3)$, $B(6, 1)$ y $C(-2, 5)$ es isósceles.



2 Inclínación y pendiente de una recta

2.1 Inclínación

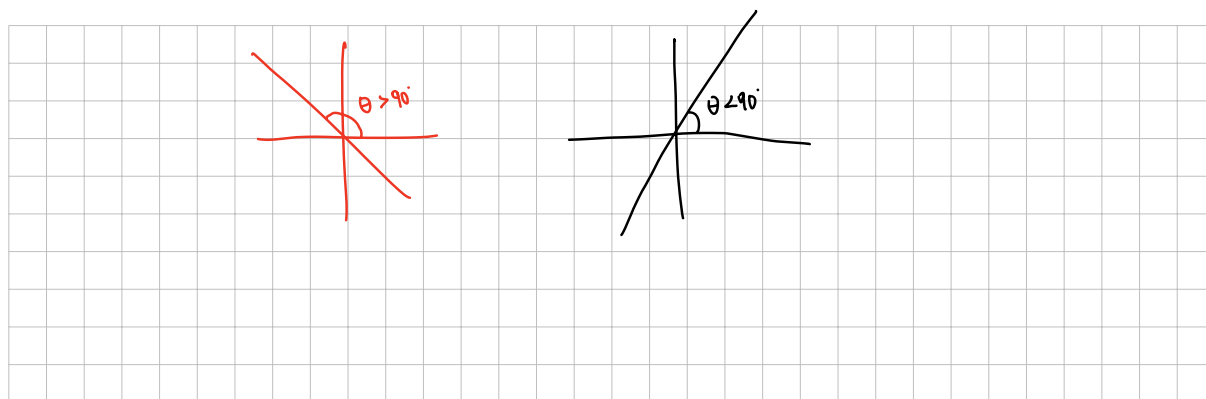
La **inclínación** de una recta es el ángulo que forma con el eje x positivo. Más precisamente:

Definición. La **inclínación** de una recta que interseca al eje x es el menor ángulo, mayor o igual a 0° , que forma la recta con la dirección positiva del eje x . La inclinación de una recta horizontal es 0 .

De acuerdo con esta definición, la inclinación θ de una recta satisface

$$0^\circ \leq \theta < 180^\circ, \quad \text{o en radianes,} \quad 0 \leq \theta < \pi.$$

Una recta con inclinación $\theta < 90^\circ$ se inclina hacia la **derecha**, mientras que una con $\theta > 90^\circ$ se inclina hacia la **izquierda**. Las rectas verticales tienen inclinación $\theta = 90^\circ$.



2.2 Pendiente

Definición. La **pendiente** de una recta es la tangente de su inclinación:

$$m = \tan(\theta).$$

Una recta inclinada hacia la derecha tiene pendiente positiva, pues la inclinación es un ángulo agudo. La pendiente de una recta inclinada hacia la izquierda es negativa. Las rectas verticales **no tienen pendiente**, pues $\pi/2$ no está en el dominio de la función tangente.

Teorema. La pendiente m de una recta que pasa por dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es igual a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \text{con } x_2 \neq x_1.$$

Ejemplo 2

Dados los puntos $A(-1, -1)$, $B(5, 0)$, $C(4, 3)$ y $D(-2, 2)$, muestre que $ABCD$ es un paralelogramo.

Solución: Para que $ABCD$ sea un paralelogramo, basta verificar que los lados opuestos son paralelos, es decir, que tienen la misma pendiente. Calculamos:

$$m_{AB} = \frac{0 - (-1)}{5 - (-1)} = \frac{1}{6}.$$

$$m_{DC} = \frac{3 - 2}{4 - (-2)} = \frac{1}{6}.$$

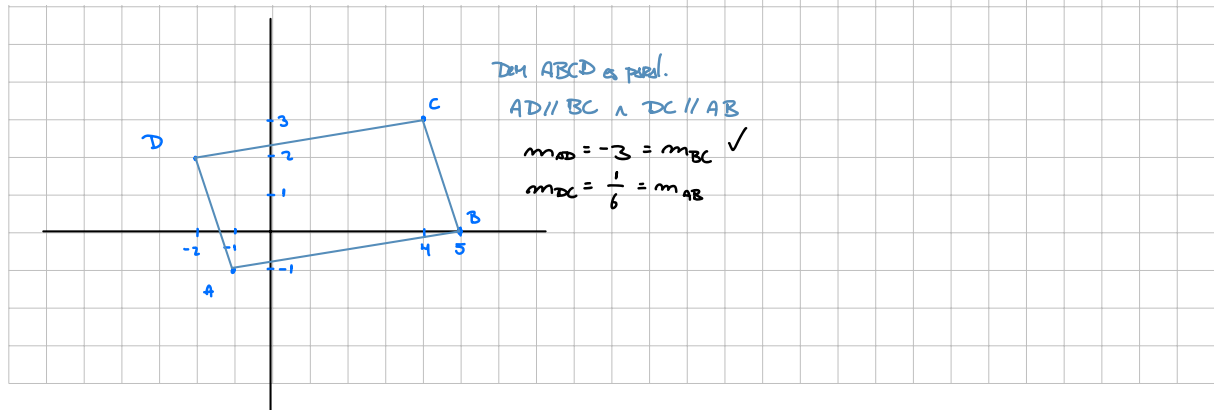
$$m_{BC} = \frac{3 - 0}{4 - 5} = \frac{3}{-1} = -3.$$

$$m_{AD} = \frac{2 - (-1)}{-2 - (-1)} = \frac{3}{-1} = -3.$$

Como $m_{AB} = m_{DC} = \frac{1}{6}$, los lados AB y DC son paralelos. Como $m_{BC} = m_{AD} = -3$, los lados BC y AD también son paralelos. Por lo tanto, $ABCD$ es un paralelogramo. $\square$

Ejemplo 2

Dados los puntos $A(-1, -1)$, $B(5, 0)$, $C(4, 3)$ y $D(-2, 2)$, muestre que $ABCD$ es un paralelogramo.



3 Ecuaciones de la recta

3.1 Definición geométrica de recta

Definición. Se llama **recta** al lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ de un plano tales que, para todo par de puntos P_1 y P_2 de ella, las pendientes de PP_1 , PP_2 y P_1P_2 son iguales.

La igualdad de las pendientes implica la relación

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m, \quad x_1 \neq x_2.$$

3.2 Ecuación punto-pendiente

De la relación anterior se obtiene directamente la **ecuación punto-pendiente** de la recta que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ con pendiente m conocida:

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

3.3 Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Si conocemos dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, la ecuación de la recta que los contiene es

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

3.4 Forma general de la ecuación de una recta

Definición. Se llama **forma general** de la ecuación de una recta a

$$Ax + By + C = 0$$

donde A , B y C son constantes reales con $A \cdot B \neq 0$. Toda recta del plano admite una ecuación de esta forma.

Ejemplo 3

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(1, -3)$ y tiene pendiente $m = -\frac{1}{2}$.

Solución: Aplicamos la ecuación punto-pendiente con $(x_1, y_1) = (1, -3)$ y $m = -\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} y - (-3) &= -\frac{1}{2}(x - 1) \\ y + 3 &= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y &= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - 3 = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

En forma general, multiplicando por 2:

$$2y = -x - 5 \implies x + 2y + 5 = 0.$$

Ejemplo 3

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(1, -3)$ y tiene pendiente $m = -\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} y - (-3) &= -\frac{1}{2}(x - 1) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y + 3 &= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y &= -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \end{aligned}$$
$$x + 2y + 5 = 0 //$$

Ejemplo 4

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(3, -4)$.

Solución: Calculamos primero la pendiente:

$$m = \frac{-4 - 2}{3 - (-1)} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}.$$

Usando la ecuación punto-pendiente con el punto $(-1, 2)$:

$$y - 2 = -\frac{3}{2}(x - (-1)) = -\frac{3}{2}(x + 1)$$

$$y - 2 = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} + 2 = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Multiplicando por 2 para obtener la forma general:

$$2y = -3x + 1 \implies 3x + 2y - 1 = 0.$$

Ejemplo 4

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(3, -4)$.

$$\begin{aligned} m &= \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} \\ y - 2 &= -\frac{3}{2}(x + 1) = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \\ y &= -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4 Rectas paralelas y perpendiculares

4.1 Rectas paralelas

Teorema. Dos rectas no verticales son **paralelas** si y solo si sus pendientes son iguales:

$$L_1 \parallel L_2 \iff m_1 = m_2.$$

Ejemplo 5

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(5, 2)$ y es paralela a la recta $4x + 6y + 5 = 0$.

Solución: Primero obtenemos la pendiente de la recta dada despejando y :

$$6y = -4x - 5 \implies y = -\frac{4}{6}x - \frac{5}{6} = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{6}.$$

Su pendiente es $m = -\frac{2}{3}$. La recta buscada tiene la misma pendiente y pasa por $(5, 2)$:

$$y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 5)$$

$$y - 2 = -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3} + 2 = -\frac{2}{3}x + \frac{16}{3}.$$

En forma general, multiplicando por 3:

$$3y = -2x + 16 \implies 2x + 3y - 16 = 0.$$

Ejemplo 5

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(5, 2)$ y es paralela a la recta $4x + 6y + 5 = 0$.

Handwritten solution on a grid background:

- $4x + 6y + 5 = 0$
- $6y = -4x - 5 \quad | :6$
- $y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{6}$
- $m = -2/3$
- $y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 5)$
- $3y - 6 = -2x + 10$
- $2x + 3y - 16 = 0$

4.2 Rectas perpendiculares

Teorema. Dos rectas inclinadas son **perpendiculares** si y solo si

$$m_1 \cdot m_2 = -1,$$

es decir, las pendientes son recíprocas con signo opuesto: $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.

Ejemplo 6

Demuestre que los puntos $P(3,3)$, $Q(8,17)$ y $R(11,5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

Solución: Calculamos las pendientes de los tres lados:

$$m_{PQ} = \frac{17-3}{8-3} = \frac{14}{5}.$$

$$m_{QR} = \frac{5-17}{11-8} = \frac{-12}{3} = -4.$$

$$m_{PR} = \frac{5-3}{11-3} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

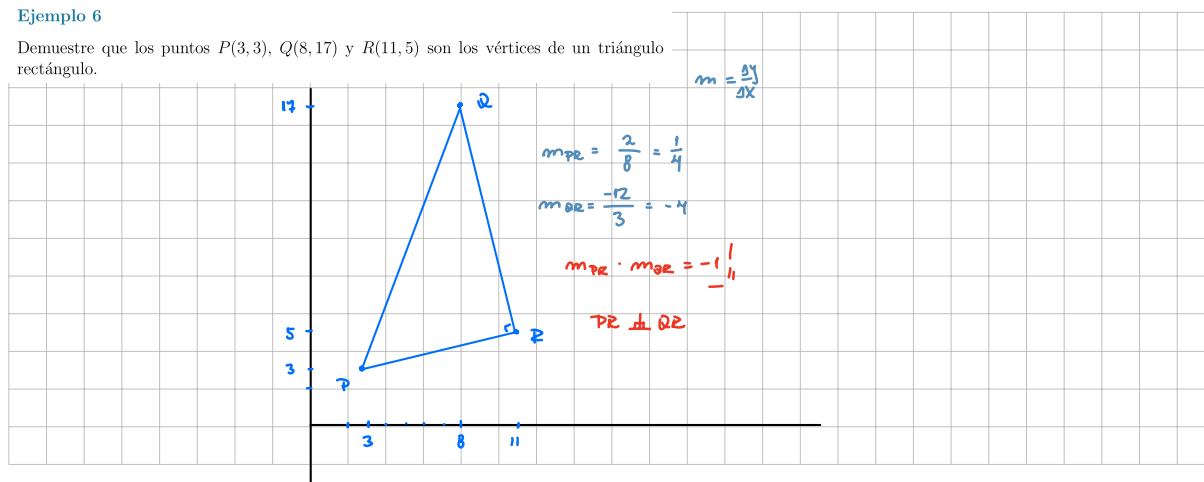
Verificamos si algún par de lados es perpendicular:

$$m_{QR} \cdot m_{PR} = (-4) \cdot \frac{1}{4} = -1.$$

Como $m_{QR} \cdot m_{PR} = -1$, los lados QR y PR son perpendiculares, es decir, el ángulo recto se ubica en el vértice R . Por lo tanto, el triángulo PQR es rectángulo. $\square$

Ejemplo 6

Demuestre que los puntos $P(3,3)$, $Q(8,17)$ y $R(11,5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.



Ejemplo 7

Encuentre la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $4x + 6y + 5 = 0$ y que pasa por el origen.

Solución: De la recta dada ya sabemos que su pendiente es $m_1 = -\frac{2}{3}$. La pendiente de la recta perpendicular es

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-2/3} = \frac{3}{2}.$$

La recta buscada pasa por el origen $(0,0)$ con pendiente $\frac{3}{2}$:

$$y - 0 = \frac{3}{2}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x.$$

En forma general: $3x - 2y = 0$.

Ejemplo 7

Encuentre la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $4x + 6y + 5 = 0$ y que pasa por el origen.

$$\begin{aligned} 4x + 6y + 5 &= 0 \\ 6y &= -4x - 5 \quad | :6 \\ y &= -\frac{2}{3}x - \frac{5}{6} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} m_1 &= -\frac{2}{3} \\ m_1 m_2 &= -1 \\ +\frac{2}{3} m_2 &= +1 \\ m_2 &= \frac{3}{2} \\ (0,0) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} y - 0 &= \frac{3}{2}(x - 0) \\ y &= \frac{3}{2}x \end{aligned}$$

5 Ángulo entre dos rectas

Cuando dos rectas se intersecan, forman ángulos entre sí. Es posible calcular estos ángulos usando las pendientes de las rectas.

5.1 Derivación de la fórmula

Consideremos dos rectas con inclinaciones θ_1 y θ_2 y sea ϕ el ángulo que forma la segunda recta con la primera (ángulo medido desde la primera hacia la segunda en sentido antihorario). De la figura se observa que

$$\phi + \theta_1 = \theta_2 \implies \phi = \theta_2 - \theta_1.$$

Usando la identidad de la tangente de la diferencia de ángulos:

$$\tan(\phi) = \tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tan(\theta_2) - \tan(\theta_1)}{1 + \tan(\theta_1)\tan(\theta_2)} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2},$$

donde $\tan(\theta_1) = m_1$ y $\tan(\theta_2) = m_2$.



5.2 Teorema del ángulo entre rectas

Teorema. Si ϕ es un ángulo entre dos rectas de pendientes m_1 y m_2 , entonces

$$\tan(\phi) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2},$$

donde m_2 es la pendiente del lado terminal y m_1 es la pendiente del lado inicial.

Observemos que si $1 + m_1 m_2 = 0$, es decir $m_1 m_2 = -1$, la tangente no está definida, lo que corresponde a $\phi = 90^\circ$: las rectas son perpendiculares. Esto es consistente con el criterio de perpendicularidad que ya conocemos.

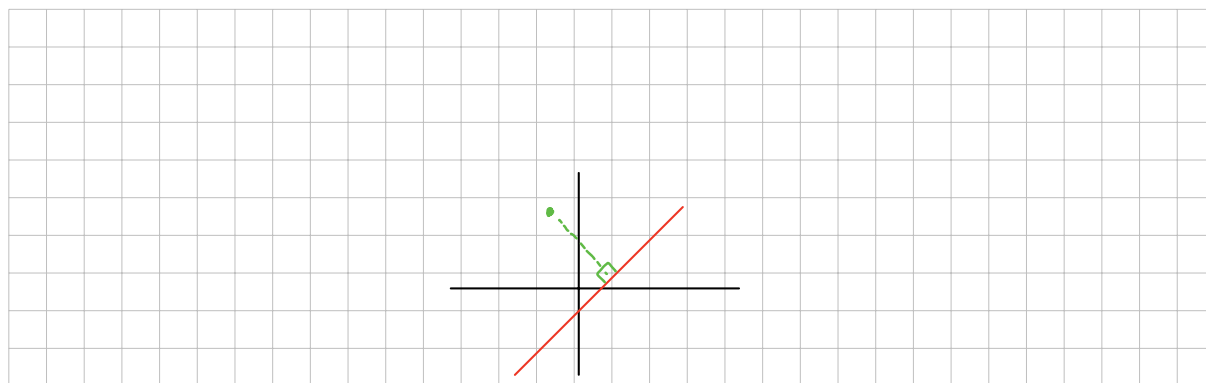


6 Distancia de un punto a una recta

6.1 Definición

Definición. (Distancia de un punto a una recta) Sea L una recta y $P(x_1, y_1)$ un punto que no está en L . Se define la **distancia de P a L** como la distancia entre P y el punto Q , donde Q es la intersección de la recta que pasa por P y es perpendicular a L . Esta distancia se denota $d(P, L)$.

Geométricamente, $d(P, L)$ es la longitud del segmento perpendicular que va desde P hasta la recta L . Esta es la distancia mínima entre P y cualquier punto de L .



6.2 Fórmula de la distancia

Teorema. Sean $P(x_1, y_1)$ un punto en el plano y L la recta de ecuación general $ax + by + c = 0$. Entonces, la distancia entre P y L es

$$d(P, L) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Demostración. Supongamos que la recta no es vertical, es decir $b \neq 0$. Escribimos la recta como $y = mx + n$ donde $m = -\frac{a}{b}$ y $n = -\frac{c}{b}$. La recta que pasa por $P(x_1, y_1)$ y es perpendicular a L tiene ecuación

$$y = -\frac{1}{m}(x - x_1) + y_1.$$

Para encontrar el punto Q de intersección de ambas rectas, resolvemos el sistema

$$\begin{cases} y = mx + n \\ y = -\frac{1}{m}(x - x_1) + y_1 \end{cases}$$

cuya solución es

$$Q\left(\frac{m(y_1 - n) + x_1}{1 + m^2}, \frac{m^2 y_1 + mx_1 + n}{1 + m^2}\right).$$

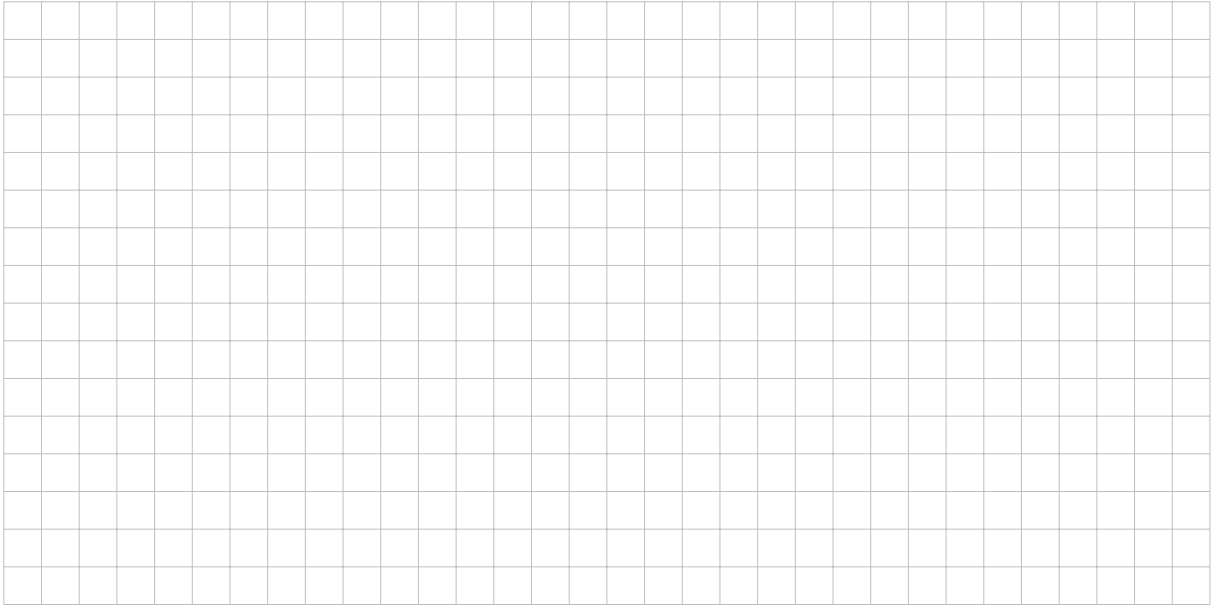
Por definición $d(P, L) = d(P, Q)$. Calculando las diferencias de coordenadas entre P y Q :

$$x_Q - x_1 = m \cdot \frac{y_1 - n - mx_1}{1 + m^2}, \quad y_Q - y_1 = \frac{mx_1 + n - y_1}{1 + m^2}.$$

Por lo tanto:

$$d(P,L)=\sqrt{m^2\frac{(y_1-n-mx_1)^2}{(1+m^2)^2}+\frac{(mx_1+n-y_1)^2}{(1+m^2)^2}}=\frac{|y_1-n+mx_1|}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Reemplazando $m = -\frac{a}{b}$ y $n = -\frac{c}{b}$ en esta expresión y simplificando se obtiene el resultado.
□



6.3 Aplicaciones de la fórmula de distancia

Ejemplo 8

Encontrar la distancia del punto de intersección de las rectas $x - y - 1 = 0$ y $x - 2y + 1 = 0$ a la recta $5x + 12y - 13 = 0$.

Solución: Primero hallamos el punto de intersección de las dos primeras rectas resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Restando la segunda ecuación de la primera:

$$(x - y - 1) - (x - 2y + 1) = 0 \implies y - 2 = 0 \implies y = 2.$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$x - 2 - 1 = 0 \implies x = 3.$$

El punto de intersección es $P(3, 2)$. Ahora aplicamos la fórmula de distancia a la recta $5x + 12y - 13 = 0$ con $a = 5$, $b = 12$, $c = -13$:

$$d(P, L) = \frac{|5(3) + 12(2) - 13|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|15 + 24 - 13|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{|26|}{\sqrt{169}} = \frac{26}{13} = 2.$$

La distancia es $\boxed{2}$.

Ejemplo 8

Encontrar la distancia del punto de intersección de las rectas $x - y - 1 = 0$ y $x - 2y + 1 = 0$ a la recta $5x + 12y - 13 = 0$.

Handwritten solution for Example 8:

System of equations:

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Solving by subtraction:

$$(x - y - 1) - (x - 2y + 1) = 0 \implies y - 2 = 0 \implies y = 2$$

Substituting $y = 2$ into the first equation:

$$x - 2 - 1 = 0 \implies x = 3$$

Point of intersection: $P(3, 2)$

Line equation: $L: 5x + 12y - 13 = 0$

Distance formula:

$$d(P, L) = \frac{|5 \cdot 3 + 12 \cdot 2 - 13|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|15 + 24 - 13|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{26}{13} = 2$$

Ejemplo 9

Encuentre la distancia entre las rectas paralelas $15x + 8y + 68 = 0$ y $15x + 8y - 51 = 0$.

Solución: Para calcular la distancia entre dos rectas paralelas, elegimos cualquier punto de una de ellas y calculamos su distancia a la otra recta. Tomamos un punto de la primera recta $15x + 8y + 68 = 0$. Hacemos $x = 0$:

$$8y + 68 = 0 \implies y = -\frac{68}{8} = -\frac{17}{2}.$$

El punto es $P(0, -\frac{17}{2})$. Calculamos su distancia a la segunda recta $15x + 8y - 51 = 0$ con $a = 15$, $b = 8$, $c = -51$:

$$d = \frac{|15(0) + 8(-\frac{17}{2}) - 51|}{\sqrt{15^2 + 8^2}} = \frac{|0 - 68 - 51|}{\sqrt{225 + 64}} = \frac{|-119|}{\sqrt{289}} = \frac{119}{17} = 7.$$

La distancia entre las rectas paralelas es $\boxed{7}$.

Nota: En general, la distancia entre dos rectas paralelas $ax + by + c_1 = 0$

Ejemplo 9

Encuentre la distancia entre las rectas paralelas $15x + 8y + 68 = 0$ y $15x + 8y - 51 = 0$.

$L_1: 15x + 8y + 68 = 0 \rightarrow \boxed{x=0} - 8y = -68 \rightarrow y = \frac{-68}{8} = \frac{-17}{2}$
 $L_2: 15x + 8y - 51 = 0$
 $P = (0, -17/2)$
 $L = 15x + 8y - 51 = 0$
 $d(P, L) = \frac{|15 \cdot 0 + 8 \cdot \frac{-17}{2} - 51|}{\sqrt{15^2 + 8^2}} = \frac{119}{17} = 7$