

Matemáticas Discretas

Introducción

La lógica proposicional constituye el lenguaje fundamental de las matemáticas. Cada vez que demostramos un teorema, resolvemos una ecuación o verificamos un algoritmo, estamos aplicando —consciente o inconscientemente— las reglas de los conectivos lógicos. Comprender con precisión cómo se combinan las proposiciones y cómo se evalúa su verdad o falsedad es el primer paso para desarrollar el pensamiento matemático riguroso que exige cualquier carrera de ingeniería o ciencias exactas.

Objetivos: En esta guía estudiaremos los bloques fundamentales del razonamiento lógico: desde la noción de proposición hasta las tablas de verdad de cada conectivo, pasando por las proposiciones compuestas, las tautologías y las contradicciones. Cada concepto se ilustra con ejemplos resueltos y se deja espacio para que el estudiante practique y desarrolle su propio razonamiento.

- Comprender el concepto de proposición lógica y su valor de verdad.
- Identificar proposiciones simples y compuestas en contextos matemáticos y cotidianos.
- Dominar la definición y tabla de verdad de cada conectivo lógico: negación, conjunción, disyunción, implicación y equivalencia.
- Construir e interpretar tablas de verdad para proposiciones compuestas arbitrarias.
- Reconocer y demostrar tautologías y contradicciones mediante tablas de verdad.
- Aplicar los conectivos lógicos en el análisis de argumentos matemáticos.

1 Proposiciones y Valores de Verdad

Definición de Proposición

Definición. Una **proposición** es una frase o expresión declarativa —no necesariamente matemática— que puede clasificarse sin ambigüedad como verdadera o como falsa, pero nunca ambas simultáneamente.

Si una proposición es verdadera, decimos que su **valor de verdad** es **V**. Si es falsa, decimos que su valor de verdad es **F**. Las proposiciones se denotan con letras minúsculas: $p, q, r, s, \dots$

Es importante destacar que no toda oración del lenguaje natural es una proposición. Las preguntas, las órdenes, los deseos y las exclamaciones **no son proposiciones**, pues no tienen un valor de verdad definido.

Ejemplo 1

Solución: A continuación se clasifican varias expresiones según sean o no proposiciones, y en caso de serlo, se indica su valor de verdad cuando es posible determinarlo.

- p : “La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180.” $\Rightarrow$ Es una proposición, su valor de verdad es **V**.
- q : “ $2 + 1 = 5$.” $\Rightarrow$ Es una proposición, su valor de verdad es **F**.
- r : “ $1 \geq 0$.” $\Rightarrow$ Es una proposición, su valor de verdad es **V**.
- s : “Estoy estudiando ingeniería.” $\Rightarrow$ Es una proposición (su valor de verdad depende del contexto, pero existe).
- ℓ : “Siéntate.” $\Rightarrow$ **No es una proposición:** es una orden, no una declaración verdadera o falsa.
- m : “¿Cuánto mide este ángulo?” $\Rightarrow$ **No es una proposición:** es una pregunta.

Solo las frases declarativas con valor de verdad bien definido son proposiciones.

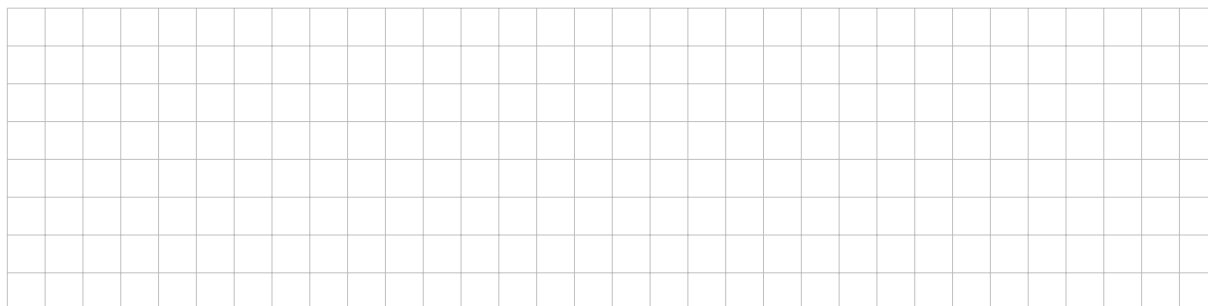
Proposiciones Compuestas

A partir de proposiciones simples es posible construir **proposiciones compuestas** mediante operaciones llamadas **conectivos lógicos**. Los conectivos fundamentales son: la negación, la conjunción, la disyunción, la implicación y la equivalencia. El valor de verdad de cada proposición compuesta queda completamente determinado por los valores de verdad de sus componentes simples, lo cual se sintetiza en las denominadas **tablas de verdad**.

Si p y q son dos proposiciones cualquiera, las combinaciones posibles de sus valores de verdad son exactamente cuatro:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Para cada par de valores, y según el conectivo utilizado, obtendremos un valor de verdad para la proposición compuesta resultante. Esta es la base de todo el cálculo proposicional.



2 Los Conectivos Lógicos

Negación

Definición. (Negación) Dada una proposición p , su **negación**, denotada $\bar{p}$ (también escrita $\neg p$), es la proposición que toma el valor de verdad contrario al de p . Su tabla de verdad es:

p	$\bar{p}$
V	F
F	V

En lenguaje natural, la negación se expresa usualmente anteponiendo “no” a la proposición original, aunque a veces se requiere reformular la oración para mantener la naturalidad del lenguaje.

Ejemplo 2

Solución: Se construyen negaciones de las siguientes proposiciones.

Sea p : “El número 7 es par.” (valor de verdad: **F**)

Entonces $\bar{p}$: “El número 7 **no** es par.” (valor de verdad: **V**)

Sea q : “Todos los estudiantes aprobaron el examen.” (valor de verdad: depende del contexto)

Entonces $\bar{q}$: “**Existe al menos un** estudiante que **no** aprobó el examen.”

Sea r : “ $x > 5$.”

Entonces $\bar{r}$: “ $x \leq 5$.”

Observar que la negación de “mayor que” es “menor o igual que”, y viceversa. Esta regla es fundamental en análisis de desigualdades.

$\bar{p}$ tiene siempre el valor de verdad opuesto al de p .

Disyunción

Definición. (Disyunción) Dadas dos proposiciones p y q , la **disyunción** $p \vee q$ (“ p o q ”, también llamado “o lógico”) es la proposición compuesta que es **falsa únicamente cuando ambas proposiciones son falsas simultáneamente**. En todos los demás casos es verdadera.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Nótese que el “o” lógico es **inclusivo**: $p \vee q$ es verdadero también cuando **ambas** son verdaderas. Esto lo distingue del uso coloquial del “o” en español, que a veces es exclusivo.

Conjunción

Definición. (Conjunción) Dadas dos proposiciones p y q , la **conjunción** $p \wedge q$ (“ p y q ”, también llamado “y lógico”) es la proposición compuesta que es **verdadera únicamente cuando ambas proposiciones son verdaderas simultáneamente**. En cualquier otro caso es falsa.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La conjunción exige que **las dos** condiciones se cumplan al mismo tiempo; basta que una sea falsa para que el resultado sea falso.

Ejemplo 3

Solución: Sea p : “El número 6 es par” (V) y q : “El número 6 es primo” (F).

Se pide determinar el valor de verdad de $p \vee q$ y de $p \wedge q$.

Para la disyunción: como p es verdadera, basta con eso para que $p \vee q$ sea verdadera, independientemente del valor de q .

$$p \vee q : \quad V \vee F = \boxed{V}$$

Para la conjunción: como q es falsa, la conjunción es falsa sin importar el valor de p .

$$p \wedge q : \quad V \wedge F = \boxed{F}$$

Interpretación: “El 6 es par **o** primo” es **verdadero** (porque sí es par). En cambio, “El 6 es par **y** primo” es **falso** (porque no es primo).



Implicación

Definición. (Implicación) Dadas dos proposiciones p y q , la **implicación** $p \Rightarrow q$ se lee “si p entonces q ” (o bien “ p implica q ”). Es una proposición condicional que es **falsa únicamente cuando p es verdadera y q es falsa**. En cualquier otro caso es verdadera.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

En la implicación $p \Rightarrow q$, llamamos a p la **hipótesis** (o antecedente) y a q la **conclusión** (o consecuente). La intuición es: una hipótesis verdadera **no puede** conducir a una conclusión falsa. Si la hipótesis es falsa, la implicación es verdadera independientemente de la conclusión (se dice que la implicación es “vacuamente verdadera”).

Observación importante. Los casos en que p es falsa y $p \Rightarrow q$ resulta verdadera suelen causar confusión al principio. Pensemos en el ejemplo: “Si llueve, entonces me mojo.” Si **no** llueve, la afirmación no ha sido violada sin importar si me mojo o no; por lo tanto, la implicación se considera verdadera en ambos subcasos.

Ejemplo 4

Solución: Analizar la implicación: “Si n es un número par, entonces n^2 es un número par.”

Sea p : “ n es par” y q : “ n^2 es par”.

Caso 1: $n = 4$. Entonces p es V y $n^2 = 16$ es par, así q es V . La implicación da $V \Rightarrow V = V$.

Caso 2: $n = 3$. Entonces p es F y $n^2 = 9$ es impar, así q es F . La implicación da $F \Rightarrow F = V$.

Caso 3: $n = 6$. Entonces p es V y $n^2 = 36$ es par, así q es V . La implicación da $V \Rightarrow V = V$.

En todos los casos la implicación es verdadera: esta es en realidad una propiedad de los números pares que puede demostrarse en general. Si $n = 2k$, entonces $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$, que es par.

$p \Rightarrow q$ es falsa solo cuando p es V y q es F .



Doble Implicación o Equivalencia

Definición. (Equivalencia) Dadas dos proposiciones p y q , la **equivalencia** o **doble implicación** $p \Leftrightarrow q$ se lee “ p si y solo si q ” (o “ p es equivalente a q ”). Es verdadera **únicamente cuando p y q tienen el mismo valor de verdad**.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La equivalencia sintetiza la idea de que p y q son “lógicamente idénticas” en términos de su valor de verdad: o ambas son verdaderas, o ambas son falsas. Nótese que $p \Leftrightarrow q$ puede escribirse también como $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$, es decir, p implica q y q implica p .

Ejemplo 5

Solución: Sea p : “ $x = 3$ ” y q : “ $x^2 = 9$ ”. Analizar $p \Leftrightarrow q$.

Si $x = 3$: p es V y q es V (pues $9 = 9$). Entonces $p \Leftrightarrow q$ da V .

Si $x = -3$: p es F y q es V (pues $(-3)^2 = 9$). Entonces $p \Leftrightarrow q$ da F .

Esto nos dice que la afirmación “ $x = 3$ si y solo si $x^2 = 9$ ” es **falsa en general**: aunque toda raíz positiva de $x^2 = 9$ es 3, también $x = -3$ satisface $x^2 = 9$. La doble implicación detecta con precisión esta asimetría.

$p \Leftrightarrow q$ es verdadera $\iff p$ y q tienen el mismo valor de verdad.
--



3 Tablas de Verdad para Proposiciones Compuestas

Una proposición compuesta puede involucrar múltiples variables proposicionales y varios conectivos anidados. Para construir su tabla de verdad de forma sistemática, se sigue el siguiente procedimiento:

Si la proposición contiene n variables proposicionales distintas, la tabla tendrá 2^n filas. Se construyen columnas intermedias resolviendo la expresión desde los paréntesis más internos hacia los más externos, aplicando en cada paso las definiciones de los conectivos.

Orden de precedencia de los conectivos (de mayor a menor):

1. Negación: $\neg$ o $\neg$
2. Conjunción: $\wedge$
3. Disyunción: $\vee$
4. Implicación: $\Rightarrow$
5. Equivalencia: $\Leftrightarrow$

Al igual que en aritmética, los paréntesis tienen la máxima prioridad y alteran el orden natural.

Ejemplo 6

Construir la tabla de verdad de la proposición compuesta $((p \Rightarrow q) \vee s) \Leftrightarrow \overline{(p \wedge q)}$, donde p , q y s son proposiciones simples.

Solución: La proposición tiene 3 variables, por lo que la tabla tiene $2^3 = 8$ filas. Se calculan columnas intermedias en el orden: $p \Rightarrow q$, luego $(p \Rightarrow q) \vee s$, luego $p \wedge q$, luego $\overline{p \wedge q}$, y finalmente la equivalencia de las dos expresiones anteriores.

p	q	s	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \vee s$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	Resultado
V	V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	V	V	F	F
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	F	V	V

La columna “Resultado” corresponde al valor de $((p \Rightarrow q) \vee s) \Leftrightarrow \overline{(p \wedge q)}$. Como no es siempre V ni siempre F , esta proposición **no es tautología ni contradicción**; es una proposición contingente.

4 Tautologías y Contradicciones

Tautologías

Definición. (Tautología) Una **tautología** es una proposición compuesta que, sin importar los valores de verdad asignados a las proposiciones simples que la constituyen, es **siempre verdadera**.

Las tautologías son fundamentales en matemáticas porque representan verdades lógicas universales, válidas en cualquier contexto. Las leyes lógicas más importantes son tautologías.

Ejemplo 8

Verificar mediante tabla de verdad que $p \vee \bar{p}$ es una tautología (Principio del Tercio Excluido).

Solución:

p	$\bar{p}$	$p \vee \bar{p}$
V	F	V
F	V	V

La columna de resultado es **siempre** V , independientemente del valor de p . Por lo tanto:

$p \vee \bar{p}$ es una tautología.

Esta tautología expresa el **Principio del Tercio Excluido**: toda proposición o es verdadera o es falsa; no existe una tercera posibilidad.



Ejemplo 9

Verificar que $p \Rightarrow (p \vee q)$ es una tautología.

Solución:

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow (p \vee q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

Verificar que $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$ es una tautología (conmutatividad de la equivalencia).

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$q \Leftrightarrow p$	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	V	V

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$ es una tautología.

Definición. (Contradicción) Una **contradicción** es una proposición compuesta que, sin importar los valores de verdad asignados a las proposiciones simples que la constituyen,

es **siempre falsa**.

Las contradicciones son tan importantes como las tautologías: identificar que una proposición es una contradicción equivale a demostrar que es imposible que sea verdadera, lo cual tiene aplicaciones directas en las demostraciones por reducción al absurdo.

Observación. Si φ es una tautología, entonces $\bar{\varphi}$ es una contradicción, y viceversa.

Ejemplo 11

Verificar que $p \wedge \bar{p}$ es una contradicción (Principio de No Contradicción).

Solución:

p	$\bar{p}$	$p \wedge \bar{p}$
V	F	F
F	V	F

La columna de resultado es **siempre F** , independientemente del valor de p . Por lo tanto:

$p \wedge \bar{p}$ es una contradicción.

Este es el **Principio de No Contradicción**: ninguna proposición puede ser verdadera y falsa al mismo tiempo. Es imposible que p y su negación sean simultáneamente verdaderas.