

EDO de Primer Orden

Introducción

Las ecuaciones diferenciales son herramientas fundamentales en la modelación matemática de fenómenos físicos, químicos, biológicos, económicos y de ingeniería. Desde el crecimiento poblacional hasta el movimiento de un péndulo, las EDO permiten describir cómo cambian las cosas en el tiempo o en el espacio.

En esta guía, exploraremos los conceptos básicos y la terminología asociada a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO). Estableceremos las diferencias entre los distintos tipos de ecuaciones, aprenderemos a clasificarlas y comprenderemos qué significa resolver una EDO. Además, presentaremos ejemplos clásicos de problemas con condiciones iniciales (PVI), fundamentales para la resolución de ecuaciones en contextos reales.

Objetivos: Al finalizar esta guía, deberías ser capaz de:

- Comprender qué es una ecuación diferencial ordinaria (EDO).
- Identificar y clasificar una EDO por su orden, linealidad y tipo.
- Comprender los conceptos de solución general, particular, explícita e implícita.
- Plantear y analizar problemas con condiciones iniciales (PVI).
- Reconocer aplicaciones de EDO en la modelación de sistemas reales.

1 ¿Qué es una Ecuación Diferencial?

Una **ecuación diferencial** es una ecuación que involucra derivadas de una función desconocida. Estas ecuaciones describen cómo cambia una cantidad en función de otra, usualmente el tiempo.

Si la ecuación involucra derivadas respecto a una sola variable independiente, se llama **ecuación diferencial ordinaria** (EDO). En cambio, si involucra derivadas parciales respecto a más de una variable, se llama **ecuación en derivadas parciales** (EDP).

Ejemplos comunes de EDO en modelación:

- **Ley de Enfriamiento de Newton**

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

donde $T(t)$ es la temperatura del objeto, T_a es la temperatura ambiente, y $k > 0$ es una constante de enfriamiento.

- **Crecimiento poblacional**

$$\frac{dP}{dt} = rP$$

donde $P(t)$ representa la población en el tiempo y r es la tasa de crecimiento.

- **Caída de un objeto con fricción**

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$

donde $v(t)$ es la velocidad, m es la masa, g es la gravedad, y k es un coeficiente de resistencia.

- **Movimiento armónico simple**

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

donde $x(t)$ representa la posición de una masa unida a un resorte.

En resumen: una EDO describe cómo cambia una cantidad con respecto a otra, y es la base de muchos modelos matemáticos de la naturaleza y la tecnología.



2 Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales

Las ecuaciones diferenciales pueden clasificarse de varias maneras. A continuación se presentan los criterios más comunes:

1. Según el tipo de derivadas

- **Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO):** Involucra derivadas respecto a una sola variable independiente.

Ejemplo: $\frac{dy}{dt} + 3y = 0$

- **Ecuación en Derivadas Parciales (EDP):** Involucra derivadas parciales respecto a dos o más variables independientes.

Ejemplo: $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (Ecuación del calor)

2. Según el orden

El **orden** de una ecuación diferencial es la derivada de mayor orden que aparece.

Ejemplos:

- $\frac{dy}{dx} = y$ (Primer orden)

- $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$ (Segundo orden)

3. Según el grado (cuando es posible)

El **grado** es el exponente más alto con que aparece la derivada de mayor orden, siempre que la ecuación esté libre de raíces, logaritmos o funciones trascendentes de las derivadas.

Ejemplo:

- $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \frac{dy}{dx} = 0$ (Segundo orden, grado 3)

4. Lineales vs No lineales:

Una ecuación es **lineal** si la función desconocida y sus derivadas aparecen en forma lineal (no multiplicadas entre sí, ni elevadas a potencias).

Ejemplos:

- Lineal: $\frac{dy}{dt} + 2y = 0$

- No lineal: $\frac{dy}{dt} = y^2$

5. Autónomas vs No autónomas:

Una EDO es **autónoma** si no depende explícitamente de la variable independiente.

- Autónoma: $\frac{dy}{dt} = y(1 - y)$

- No autónoma: $\frac{dy}{dt} = t + y$

Resumen visual

Criterio	Ejemplo
Ordinaria (EDO)	$\frac{dy}{dt} + y = 0$
Parcial (EDP)	$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
Orden 1	$\frac{dy}{dt} = 5y$
Orden 2	$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$
Lineal	$y'' + y = \cos t$
No lineal	$y' = y^2$
Autónoma	$y' = y(1 - y)$
No autónoma	$y' = t + y$