

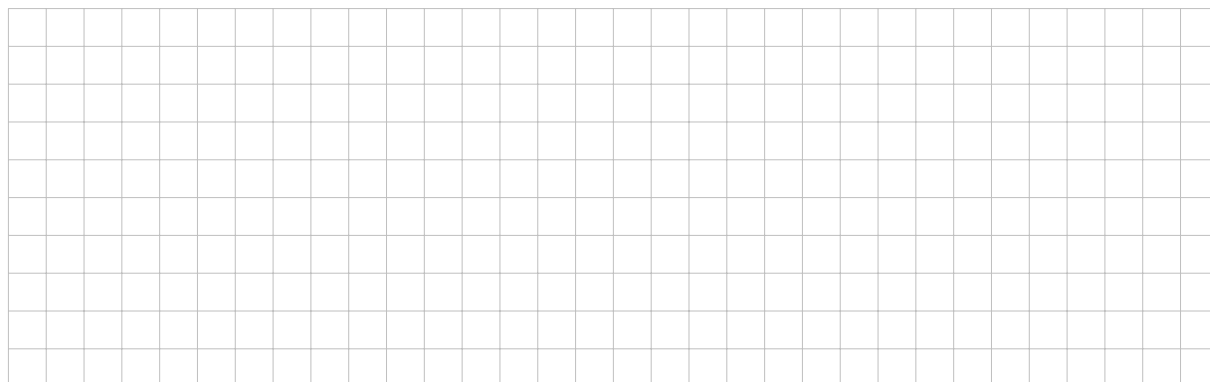
Álgebra Lineal

Introducción

Esta guía presenta lo esencial para trabajar con sistemas de ecuaciones lineales: escribirlos en forma matricial $Ax = b$ y como matriz aumentada $[A | b]$; aplicar operaciones elementales de fila para llevar $[A | b]$ a formas escalonada y escalonada reducida; identificar pivotes y variables libres; y, a partir de ello, clasificar un sistema como SCD, SCI o SI y describir su conjunto solución.

Objetivos (de esta guía):

- Escribir un sistema en forma $Ax = b$ y como matriz aumentada $[A | b]$; reconocer tamaños $m \times n$.
- Distinguir filas, columnas, $0_{m \times n}$ e identidad I_n .
- Aplicar operaciones elementales de fila (OEF) para Gauss y Gauss–Jordan de manera ordenada.
- Leer de la forma escalonada/reducida los pivotes, variables básicas y variables libres.
- Clasificar SCD/SCI/SI y expresar el conjunto solución (parametrización), verificando por sustitución.



1 Sistemas de ecuaciones lineales

Definición (ecuación lineal). En variables $x_1, \dots, x_n$,

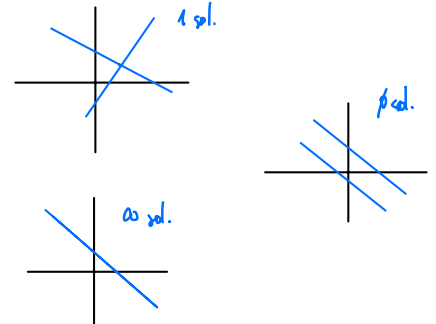
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

con $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$).

Definición (sistema lineal). Un conjunto finito de ecuaciones lineales en las mismas variables. Forma compacta: $Ax = b$, con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Matriz aumentada: $[A | b]$.

Clasificación.

- **SCD** (compatible determinado): solución única.
- **SCI** (compatible indeterminado): infinitas soluciones.
- **SI** (incompatible): ninguna solución.



Ejemplo 1 — SCD (exactamente una solución)

Resolver

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 = 3. \end{cases} \quad \oplus \quad \downarrow$$

$$x_1 = -1 + 2x_2$$

$$-(-1 + 2x_2) + 3x_2 = 3$$

$$1 - 2x_2 + 3x_2 = 3$$

$$1 + x_2 = 3$$

$$x_2 = 2$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 2$$

$$x_1 - 2 \cdot 2 = -1$$

$$x_1 = 3$$

Eliminación

Solución (para comprobar). Sumando ambas ecuaciones: $x_2 = 2$. Sustituyendo en $x_1 - 2x_2 = -1$: $x_1 - 4 = -1 \Rightarrow x_1 = 3$. **Respuesta:** $(x_1, x_2) = (3, 2)$. *Comprobación:* $3 - 2 \cdot 2 = -1$ y $-3 + 3 \cdot 2 = 3$.

Ejemplo 2 — SI (sin solución)

Resolver

$$\begin{cases} \cancel{x_1} - 2\cancel{x_2} = -1, \\ -\cancel{x_1} + 2\cancel{x_2} = 3. \end{cases} \downarrow$$

$$0 = 2 \quad \nexists$$

Solución (para comprobar). Sumando ambas ecuaciones se obtiene $0 = 2$, contradicción. **Conclusión: SI** (no existe par (x_1, x_2) que satisfaga ambas).

Ejemplo 3 — SCI (infinitas soluciones)

Resolver

$$\begin{cases} \cancel{x_1} - 2\cancel{x_2} = -1, & \textcircled{1} \\ -2\cancel{x_1} + 4\cancel{x_2} = 2. & \textcircled{2} \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \hline 2x_1 - 4x_2 = -2 \end{array}$$

$$\stackrel{+}{\cup} \quad \begin{array}{l} \cdot (-2) \\ \hline -2x_1 + 4x_2 = -1 \end{array}$$

$$\textcircled{2} + 2\textcircled{1} \Rightarrow 0 = 0$$

Solución (para comprobar). La segunda ecuación es -2 veces la primera $\Rightarrow$ ecuaciones dependientes. Parametrizando con $t \in \mathbb{R}$: tome $x_2 = t$ y de $x_1 - 2t = -1$ resulta $x_1 = 2t - 1$. **Conjunto solución:** $\{(2t - 1, t) : t \in \mathbb{R}\}$. *Comprobación:* Sustituir $(2t - 1, t)$ en ambas ecuaciones verifica las igualdades.

2 Notación matricial

Definición (matriz). Una *matriz* A de tamaño $m \times n$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (usualmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) es un arreglo rectangular de entradas $a_{ij} \in \mathbb{K}$:

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} \overset{x_1}{a_{11}} & \overset{x_2}{a_{12}} & \cdots & \overset{x_m}{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} m \text{ vdr.} \\ m \text{ ecu.} \end{array}$$

$i = \text{índice de fila } (1..m)$
 $j = \text{índice de columna } (1..n)$

Una **fila** es un vector $1 \times n$; una **columna** es un vector $m \times 1$. Denotaremos $0_{m \times n}$ a la matriz cero y I_n a la identidad $n \times n$.

Sistemas lineales y forma matricial. Un sistema de m ecuaciones en n incógnitas se escribe

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{K}^{m \times n}, \quad x \in \mathbb{K}^n, \quad b \in \mathbb{K}^m,$$

y su **matriz aumentada** es $[A | b]$, que tiene tamaño $m \times (n + 1)$.

Ejemplo 1 — Matriz de coeficientes y aumentada

Dado el sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ \quad \quad + 2x_2 - 8x_3 = 8, \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9, \end{cases}$$

escriba A , x , b , la forma $Ax = b$ y la matriz aumentada $[A | b]$. Indique además los tamaños.

$$\begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad b \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array} \right) \end{array}$$

Solución (para comprobar).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1},$$

$$Ax = b \quad \text{y} \quad [A | b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{3 \times 4}.$$

(Chequeo rápido: $Ax = (x_1 - 2x_2 + x_3, 2x_2 - 8x_3, -4x_1 + 5x_2 + 9x_3)^\top = b$.)

Ejemplo 2 — Índices, filas y columnas

Sea

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Determine: (i) el tamaño de B ; (ii) la fila 2 y la columna 3; (iii) las entradas b_{23} y b_{31} .

$B_{3 \times 4}$

$b_{23} = 5$ $b_{31} = 0$

Solución (para comprobar). (i) $B \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$. (ii) Fila 2: (3, 4, 5, 6); Columna 3: (0, 5, 7)^T. (iii) $b_{23} = 5$, $b_{31} = 0$.

Ejemplo 3 — Vector de incógnitas y términos independientes

Escriba en forma matricial el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 7, \\ -3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Indique A , x , b y los tamaños.

Solución (para comprobar).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}.$$