

Cálculo en Varias Variables

Introducción

En esta guía estudiaremos los vectores en el espacio tridimensional, incluyendo sistemas de coordenadas, ecuaciones de rectas y planos, cálculo de distancias y la ecuación de la esfera. Estos conceptos son fundamentales para entender la geometría en 3D y sus aplicaciones en física, ingeniería y computación gráfica.

Objetivos:

- Comprender los sistemas de coordenadas en 3D.
- Definir rectas y planos mediante ecuaciones vectoriales y paramétricas.
- Calcular distancias entre puntos, rectas y planos.
- Determinar la ecuación de una esfera en el espacio.

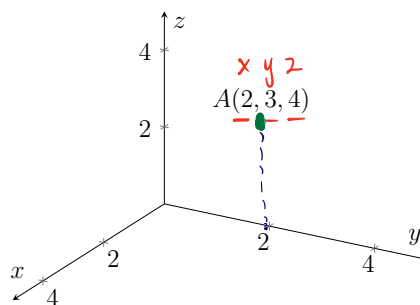
1 Sistemas de Coordenadas Tridimensionales

Un punto en el espacio 3D se representa como $P(x, y, z)$, donde:

- x : coordenada en el eje horizontal (abscisa).
- y : coordenada en el eje vertical (ordenada).
- z : coordenada en el eje profundidad (cota).

1.1 Ejemplo 1: Representación Gráfica

Graficar el punto $A(2, 3, 4)$.



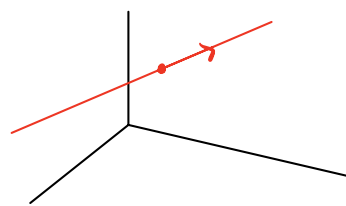
2 Rectas y Planos en el Espacio

2.1 Ecuación de la Recta

Una recta en 3D puede definirse mediante:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

donde $\vec{v} = (a, b, c)$ es el vector director y $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto de la recta.



2.2 Ecuación del Plano

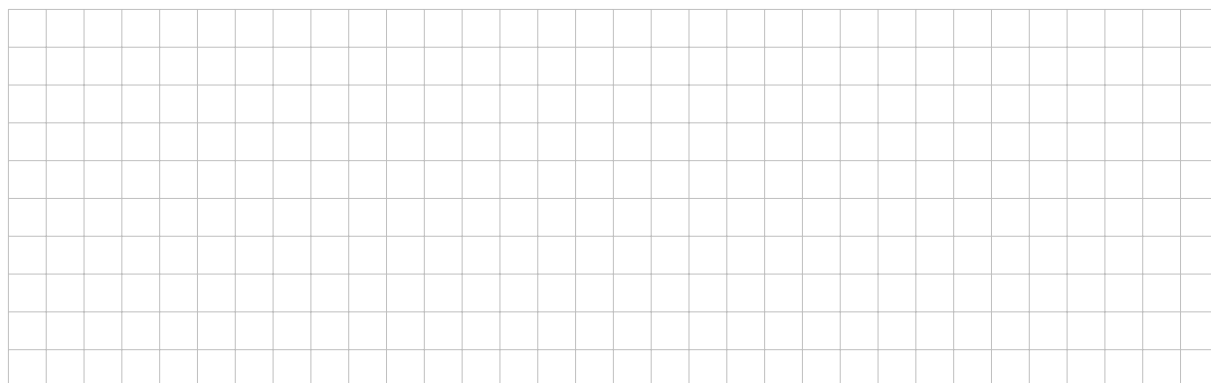
Un plano se define por:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

donde $\vec{n} = (a, b, c)$ es el vector normal al plano y $P(x_0, y_0, z_0)$ es un punto del plano.

2.3 Ejemplo 2: Ecuación de un Plano

Encontrar la ecuación del plano que pasa por $(1, 2, 3)$ con vector normal $\vec{n} = (2, -1, 4)$.



3 Distancias en el Espacio

3.1 Distancia entre Dos Puntos

La distancia entre $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ es:

$$d(P, Q) = \|P - Q\|$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

3.2 Distancia de un Punto a un Plano

Para un plano $ax + by + cz + d = 0$ y punto $P(x_0, y_0, z_0)$:

$$P - Q = \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2 \rangle$$
$$\|P - Q\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

3.3 Ejemplo 3: Distancia entre Puntos

Calcular la distancia entre $A(1, \underline{0}, \underline{2})$ y $B(\underline{3}, \underline{4}, \underline{-1})$.

$$\begin{aligned} A - B &= (-2, -4, 3) \\ \|A - B\| &= \sqrt{4 + 16 + 9} = \sqrt{29} \end{aligned}$$

4 Ecuación de la Esfera

Una esfera con centro en $C(h, k, l)$ y radio r tiene ecuación:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

4.1 Ejemplo 4: Ecuación de una Esfera

Encontrar la ecuación de la esfera con centro $(2, -1, 3)$ y radio 5.

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 25$$

Ejemplos

Ejemplo 1

Calcule la distancia del punto $(1, 2, 3)$ al plano $2x - y + 3z = 6$.



Ejemplo 2

Determine si el punto $(4, 1, -2)$ está dentro, fuera o sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z = 10$.



Ejemplo 3

Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $(1, -2, 4)$ y es paralela al vector $\vec{v} = (3, 0, -1)$.

